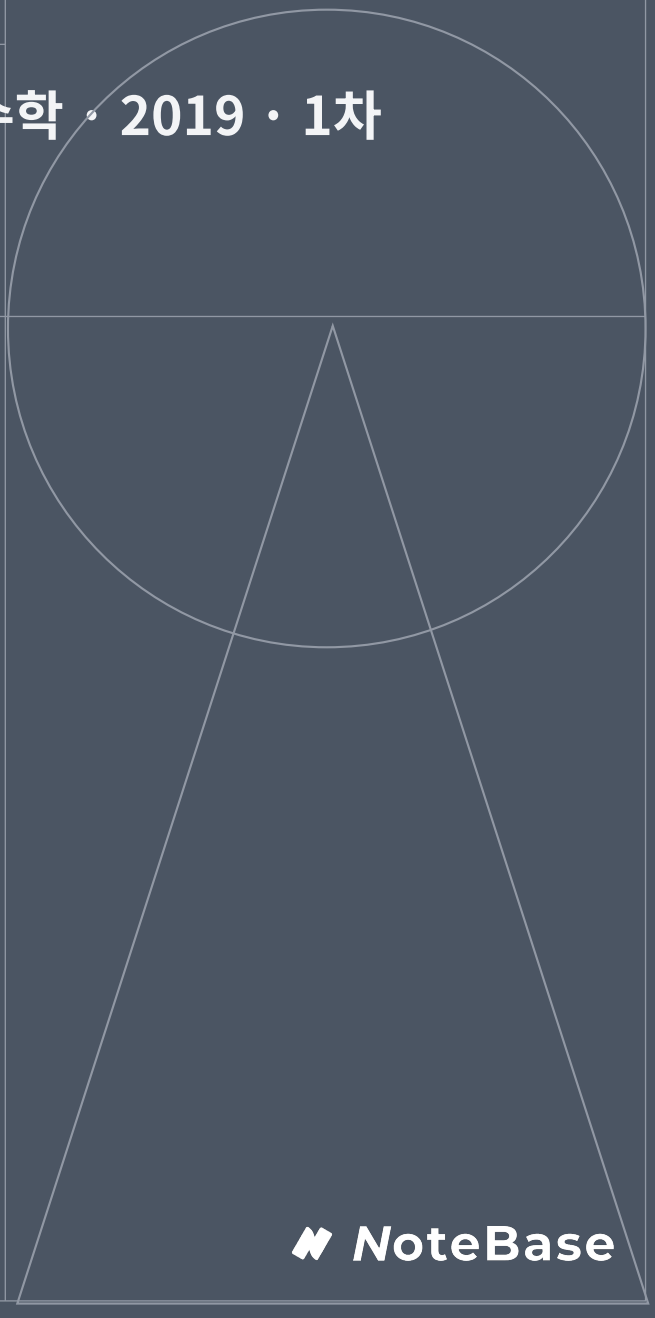
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2019 · 1차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2019 · 1차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2019 · 1차

문 1. 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때 나머지는 3이고, $x-3$으로 나누었을 때도 나머지가 3이다. $f(x)$가 $x-2$로 나누어떨어질 때, $f(4)$의 값은?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 나머지정리와 삼차다항식의 인수 표현을 이용해 함수값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(1)=3$, $f(3)=3$, $f(2)=0$이다.
구해야 할 값: $f(4)$이다.
주의할 조건: $f(x)$의 최고차항 계수가 1이므로 $f(x)-3$도 최고차항 계수가 1인 삼차다항식이다.

사용할 공식

나머지정리에 따라 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $f(a)$이다. 따라서 $f(1)=f(3)=3$이므로 $f(x)-3$은 $x-1$, $x-3$을 인수로 가진다.
$f(x)-3=(x-1)(x-3)(x-a)$
이 식을 쓰는 이유는 좌변이 최고차항 계수가 1인 삼차다항식이고, 이미 두 근 1과 3을 알기 때문에 나머지 한 근만 정하면 되기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

1. $f(2)=0$을 인수 표현에 대입한다.
$0-3=(2-1)(2-3)(2-a)$
2. 이를 정리하면 $-3=-(2-a)=a-2$이므로 $a=-1$이다.
3. 따라서 $f(x)=(x-1)(x-3)(x+1)+3$이고,
$f(4)=(4-1)(4-3)(4+1)+3=3\cdot1\cdot5+3=18$

선지 판단

① X — 15는 마지막 상수항 3을 더하지 않고 $(4-1)(4-3)(4+1)$만 계산한 값이다. 틀린 값 15는 18로 고쳐야 한다.
② X — 계산식 $3\cdot1\cdot5+3$의 값은 16이 아니라 18이다. 틀린 값 16은 18로 고쳐야 한다.
③ X — 계산식 $3\cdot1\cdot5+3$의 값은 17이 아니라 18이다. 틀린 값 17은 18로 고쳐야 한다.
④ O — $f(4)=18$이므로 계산 결과와 일치한다.

오답 포인트

①의 15는 $f(x)-3$의 값을 $f(x)$의 값으로 착각할 때 나오는 오답이다. 인수분해한 식이 $f(x)$가 아니라 $f(x)-3$이라는 점을 끝까지 유지해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

같은 나머지가 두 번 주어지면 다항식에서 그 나머지를 뺀다. 나머지를 뺀 다항식의 두 근으로 인수 두 개를 만들고, 최고차항 계수와 추가 조건으로 남은 인수를 정한 뒤 요구한 함수값을 계산한다.

암기 포인트

같은 나머지 r가 주어지면 $f(x)-r$를 인수분해한다.

NoteBase

문 2. 방정식 $x^3 - 1 = 0$의 한 허근을 ω라 할 때, $(2 - \omega^{19})(2 - \overline{\omega}^{19})$의 값은?(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

① 3

② 5

③ 7

④ 9

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 허근인 세제곱근의 성질과 지수의 주기성을 이용해 켤레복소수의 곱을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $\omega^3 = 1, \omega \neq 1$이고 $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.
구해야 할 값: $(2 - \omega^{19})(2 - \overline{\omega}^{19})$이다.
주의할 조건: $19 = 3 \times 6 + 1$이므로 지수를 3으로 나눈 나머지를 이용한다.

사용할 공식

허근인 세제곱근에는 $1 + \omega + \omega^2 = 0, \overline{\omega} = \omega^2, \omega\overline{\omega} = 1$이 성립한다. 또한 $\omega^3 = 1$이므로 $\omega^{3k+r} = \omega^r$이다.
지수가 3을 주기로 반복되고, 켤레인 두 수의 합과 곱을 알 수 있으므로 이 성질을 사용한다.

계산 과정

1. $19 \equiv 1 \pm \mathrm{od}\ 3$이므로 $\omega^{19} = \omega, \overline{\omega}^{19} = \overline{\omega}$이다.
2. $1 + \omega + \omega^2 = 0$이고 $\overline{\omega} = \omega^2$이므로 $\omega + \overline{\omega} = -1$이다. 또한 $\omega\overline{\omega} = 1$이다.
3. 따라서
$(2 - \omega)(2 - \overline{\omega}) = 4 - 2(\omega + \overline{\omega}) + \omega\overline{\omega} = 4 - 2(-1) + 1 = 7.$

선지 판단

① X — 3은 계산 결과 7과 다르다. ①의 3을 올바르게 고치면 7이다.
② X — 5는 계산 결과 7과 다르다. ②의 5를 올바르게 고치면 7이다.
③ O — 식의 값이 7이므로 옳다.
④ X — 9는 계산 결과 7과 다르다. ④의 9를 올바르게 고치면 7이다.

NoteBase

오답 포인트

지수 19를 그대로 계산하려 하거나 $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$ 중 하나를 빠뜨리기 쉽다. 특히 전개식의 가운데 항은 $-2(\omega+\overline{\omega})=2$가 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

세제곱근의 거듭제곱은 먼저 지수를 3으로 나눈 나머지로 줄이고, 켤레복소수의 대칭식은 합 $\omega+\overline{\omega}=-1$과 곱 $\omega\overline{\omega}=1$로 계산한다.

암기 포인트

허근인 세제곱근은 $\omega^3=1$, $1+\omega+\omega^2=0$, $\overline{\omega}=\omega^2$이다.

NoteBase

문 3. $x^2 - xy + ax - 2y^2 - 8y - 8$이 x, y에 대한 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 a의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 이차식의 최고차항을 먼저 인수분해한 뒤, 두 일차식의 계수를 비교하여 상수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

이차항 부분은 $x^2 - xy - 2y^2 = (x + y)(x - 2y)$이다. 따라서 전체 식을 $(x + y + m)(x - 2y + n)$의 꼴로 놓을 수 있다. 상수항은 $mn = -8$, y의 계수는 $n - 2m = -8$을 만족해야 한다.

사용할 공식

$(x + y + m)(x - 2y + n) = x^2 - xy - 2y^2 + (m + n)x + (n - 2m)y + mn$
주어진 식과 같은 다항식이 되려면 대응하는 항의 계수가 각각 같아야 하므로 계수 비교를 사용한다.

계산 과정

y의 계수와 상수항을 비교하면
$n - 2m = -8, \quad mn = -8$
이다. 첫째 식에서 $n = 2m - 8$이므로
$m(2m - 8) = -8$
$2m^2 - 8m + 8 = 0$
$(m - 2)^2 = 0$
이다. 따라서 $m = 2$, $n = -4$이고, x의 계수는
$a = m + n = 2 + (-4) = -2$
이다. 실제로
$(x + y + 2)(x - 2y - 4) = x^2 - xy - 2x - 2y^2 - 8y - 8$
이므로 조건을 만족한다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a=-3$은 계수 비교로 얻은 $a=-2$와 다르다. 틀린 값 -3은 -2로 고쳐야 한다.
② O — 계산 결과 $a=-2$이고, 실제 인수분해 $(x+y+2)(x-2y-4)$의 x항 계수도 -2이다.
③ X — $a=-1$은 두 일차식의 상수 $m=2, n=-4$의 합과 일치하지 않는다. 틀린 값 -1은 -2로 고쳐야 한다.
④ X — $a=0$이면 x항이 없어지지만, 조건을 만족하는 인수분해에서는 x항이 $-2x$로 생긴다. 틀린 값 0은 -2로 고쳐야 한다.

오답 포인트

a는 두 일차식의 상수항을 곱한 값이 아니라 합 $m+n$이다. 상수항 조건 $mn=-8$만 맞추고 y의 계수 조건 $n-2m=-8$을 빠뜨리면 오답을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

이차항 부분을 먼저 인수분해하고 각 인수에 상수를 붙인 뒤, 일차항과 상수항의 계수를 모두 비교한다.
마지막에는 전개하여 원래 식과 정확히 일치하는지 검산한다.

암기 포인트

인수분해 가능 조건은 최고차항의 인수 구조를 정한 뒤 일차항과 상수항을 동시에 계수 비교하는 것이다.

NoteBase

문 4. 양의 실수 a, b에 대하여 직선 $\frac{x}{2a}+3y=1$이 점 $\left(2,\frac{1}{b}\right)$을 지날 때, ab의 최솟값은?

① 10

② 12

③ 14

④ 16

정답 2번

출제 포인트

직선이 주어진 점을 지난다는 조건을 식으로 세운 뒤, 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 ab의 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

직선 $\frac{x}{2a}+3y=1$에 점 $\left(2,\frac{1}{b}\right)$을 대입하면 $\frac{1}{a}+\frac{3}{b}=1$이다. a, b는 양의 실수이므로 $\frac{1}{a}$와 $\frac{3}{b}$도 양수이다. 구해야 할 값은 ab의 최솟값이다.

사용할 공식

양수 u, v에 대하여 $u+v=1$이면 uv≤≤ft((u+v)/(2))^2=14이고, 등호는 u=v=12일 때 성립한다. 여기서 u=1a, v=3b로 두면 uv=3ab이므로, uv를 최대로 할 때 ab가 최소가 된다.

계산 과정

1a+3b=1
산술평균과 기하평균의 관계에 따라
3ab=1a·3b≤≤ft((1a+3b)/(2))^2=14
따라서 $ab \geq 12$이다. 등호 조건 1a=3b=12에서 $a=2$, $b=6$이므로 실제로 $ab=12$가 된다. 따라서 최솟값은 12이다.

선지 판단

① X — 10은 하한 12보다 작아 조건을 만족하는 ab의 값이 될 수 없다. '최솟값은 10'이 아니라 '최솟값은 12'가 옳다.
② O — $ab \geq 12$이고 $a=2$, $b=6$일 때 등호가 성립하므로 최솟값은 12이다.
③ X — 14는 가능한 값일 수는 있지만 최솟값은 아니다. '최솟값은 14'가 아니라 '최솟값은 12'가 옳다.
④ X — 16도 가능한 값일 수는 있지만 최솟값은 아니다. '최솟값은 16'이 아니라 '최솟값은 12'가 옳다.

NoteBase

오답 포인트

점의 좌표를 대입할 때 (2)/(2a)=1a, 3·1b=3b가 된다. 또한 3ab≤14에서 양수인 양변의 역수를 취하면 부등호 방향이 바뀌어 $ab \geq 12$가 된다는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

점의 좌표를 직선의 방정식에 대입하여 양수 두 항의 합을 만든다. 두 항의 곱에 산술평균과 기하평균의 관계를 적용하고, 등호 조건이 실제로 성립하는지 확인하여 최솟값을 판단한다.

암기 포인트

양수 u, v의 합이 일정하면 곱 uv는 $u = v$일 때 최대이다. ab가 그 곱의 역수에 비례하면 이때 ab는 최소가 된다.

NoteBase

문 5. 임의의 실수 a에 대하여 점 $A(-1, 1)$과 직선 $y = ax + 2a + 3$ 사이의 거리의 최댓값은?

① $\sqrt{5}$
② $\sqrt{7}$
③ $2\sqrt{3}$
④ $3\sqrt{2}$

정답 1번

출제 포인트

점과 직선 사이의 거리 공식을 세운 뒤, 코시-슈바르츠 부등식으로 매개변수에 따른 거리의 최댓값을 구하는 문제이다.

조건 정리

직선은 $ax - y + 2a + 3 = 0$이고 점은 $A(-1, 1)$이다. 구해야 할 값은 실수 a 전체에서 점 A와 직선 사이의 거리의 최댓값이다.

사용할 공식

점 (x_0, y_0)과 직선 $Ax + By + C = 0$ 사이의 거리는 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$이다. 이 문제의 거리를 정리하면 $d = \frac{|a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$이므로, 코시-슈바르츠 부등식 $(a + 2)^2 \le (a^2 + 1)(1^2 + 2^2)$을 이용할 수 있다.

계산 과정

직선 $ax - y + 2a + 3 = 0$에 점 $(-1, 1)$을 대입하면 다음과 같다.
$d = \frac{|-a - 1 + 2a + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|a + 2|}{\sqrt{a^2 + 1}}$
코시-슈바르츠 부등식으로
$(a + 2)^2 \le (a^2 + 1)(1^2 + 2^2) = 5(a^2 + 1)$
이므로 $d \le \sqrt{5}$이다. 등호는 $(a, 1)$과 $(1, 2)$가 같은 방향일 때, 즉 a=12일 때 성립한다. 따라서 실제 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

선지 판단

① O — a=12에서 거리가 $\sqrt{5}$가 되므로 실제 최댓값과 일치한다.
② X — $\sqrt{7}$은 상한 $\sqrt{5}$보다 크므로 나올 수 없다. 틀린 값 $\sqrt{7}$ → 올바른 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.
③ X — $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$는 상한 $\sqrt{5}$보다 크므로 나올 수 없다. 틀린 값 $2\sqrt{3}$ → 올바른 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.
④ X — $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$은 상한 $\sqrt{5}$보다 크므로 나올 수 없다. 틀린 값 $3\sqrt{2}$ → 올바른 최댓값은 $\sqrt{5}$이다.

NoteBase

오답 포인트

거리식을 구한 뒤 분자 $|a+2|$만 크게 만들 수 있다고 생각하면 분모 $\sqrt{a^2+1}$도 함께 변한다는 점을 놓치게 된다. 또한 부등식으로 상한만 구하고 등호 성립 조건을 확인하지 않으면 그 값이 실제 최댓값인지 확정할 수 없다.

다시 나오면 이렇게 판단

매개변수가 들어 있는 점과 직선 사이의 거리 문제는 먼저 거리식을 만든다. 이어서 분자를 내적으로 보고 코시-슈바르츠 부등식으로 상한을 구한 뒤, 등호가 가능한 매개변수 값을 확인하여 최댓값을 확정한다.

암기 포인트

$\frac{|pa+q|}{\sqrt{a^2+1}}$의 최댓값은 $\sqrt{p^2+q^2}$이며, 등호 성립 조건까지 확인한다.

NoteBase

문 6. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y = f(x)$가 점 $A(1, 3)$을 지나고, 꼭짓점은 제3사분면에 있으면서 직선 $y = -x - 2$ 위에 있다. 이때, 이차함수 $y = f(x)$의 최솟값은?

① -7

② -5

③ -3

④ -1

정답 4번

출제 포인트

최고차항의 계수가 1인 이차함수를 꼭짓점형으로 나타내고, 꼭짓점의 위치와 주어진 점을 이용해 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

꼭짓점을 (h, k)라 하면 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x) = (x - h)^2 + k$이다.
꼭짓점이 직선 $y = -x - 2$ 위에 있으므로 $k = -h - 2$이다.
꼭짓점이 제3사분면에 있으므로 $h < 0, k < 0$이다.
그래프가 점 $A(1, 3)$을 지나므로 $f(1) = 3$이다.

사용할 공식

이차함수의 꼭짓점형은 $f(x) = a(x - h)^2 + k$이고, $a > 0$이면 최솟값은 꼭짓점의 y좌표 k이다. 이 문제에서는 최고차항의 계수가 1이므로 $a = 1 > 0$이며, 꼭짓점의 좌표를 구하면 최솟값이 바로 결정된다.

계산 과정

점 $A(1, 3)$을 대입하면
$(1 - h)^2 + k = 3$
이다. 여기에 $k = -h - 2$를 대입하면
$(1 - h)^2 - h - 2 = 3$
$h^2 - 3h - 4 = 0$
$(h - 4)(h + 1) = 0$
이므로 $h = 4$ 또는 $h = -1$이다. 꼭짓점은 제3사분면에 있으므로 $h < 0$인 $h = -1$만 가능하다. 따라서
$k = -(-1) - 2 = -1$
이고, 이차함수의 최솟값은 -1이다.

NoteBase

선지 판단

① X — -7은 계산으로 구한 꼭짓점의 y좌표와 일치하지 않는다. ①의 -7은 잘못된 값이며, 올바른 최솟값은 -1이다.
② X — -5는 계산으로 구한 꼭짓점의 y좌표와 일치하지 않는다. ②의 -5는 잘못된 값이며, 올바른 최솟값은 -1이다.
③ X — -3은 계산으로 구한 꼭짓점의 y좌표와 일치하지 않는다. ③의 -3은 잘못된 값이며, 올바른 최솟값은 -1이다.
④ O — 제3사분면 조건으로 $h=-1$을 선택하면 꼭짓점의 y좌표가 $k=-1$이므로 최솟값은 -1이다.

오답 포인트

방정식만 풀면 $h=4$와 $h=-1$이 모두 나오지만, 꼭짓점이 제3사분면에 있다는 조건을 적용해야 $h=-1$로 확정된다. 또한 구해야 하는 값은 꼭짓점의 x좌표가 아니라 최솟값인 y좌표 k이다.

다시 나오면 이렇게 판단

최고차항의 계수와 꼭짓점이 주어진 이차함수는 먼저 꼭짓점형으로 나타낸다. 꼭짓점이 놓인 직선의 식과 그래프가 지나는 점을 연립한 뒤, 사분면 조건으로 해를 고르고 꼭짓점의 y좌표를 최솟값으로 판단한다.

암기 포인트

$a>0$인 꼭짓점형 $y=a(x-h)^2+k$의 최솟값은 꼭짓점의 y좌표 k이다.

NoteBase

문 7. 좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$을 y축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원 위의 임의의 점과 원점 사이의 거리의 최댓값을 a, 최솟값을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① $\sqrt{5}$
② $2\sqrt{5}$
③ $3\sqrt{5}$
④ $4\sqrt{5}$

정답 2번

출제 포인트

원의 대칭이동과 평행이동으로 새 중심을 구한 뒤, 원점에서 원 위의 점까지의 거리의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 원의 중심은 $(1, 1)$, 반지름은 1이다. y축에 대하여 대칭이동하면 중심은 $(-1, 1)$이 되고, 이어서 y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동하면 중심은 $(-1, 2)$가 된다. 따라서 이동한 원의 중심과 원점 사이의 거리는 $\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$이다.

사용할 공식

원점에서 원의 중심까지의 거리를 d, 반지름을 r라 하면 원점이 원 밖에 있을 때 원 위의 점까지의 거리의 최댓값과 최솟값은 각각 $d+r$, $d-r$이다. 중심과 원점을 잇는 직선 위에서 중심으로부터 바깥쪽 점이 가장 멀고 원점 쪽 점이 가장 가깝기 때문이다.

계산 과정

이동한 원에서 $d=\sqrt{5}$, $r=1$이다. 따라서
$a=\sqrt{5}+1, \qquad b=\sqrt{5}-1$
이고,
$a+b=(\sqrt{5}+1)+(\sqrt{5}-1)=2\sqrt{5}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\sqrt{5}$는 이동한 원의 중심과 원점 사이의 거리 d일 뿐 $a+b$가 아니다. 틀린 값 $\sqrt{5}$를 올바르게 고치면 $2\sqrt{5}$이다.
② O — 계산 결과 $a+b=2\sqrt{5}$이므로 옳다.
③ X — $3\sqrt{5}$는 $a=\sqrt{5}+1$과 $b=\sqrt{5}-1$을 더한 값이 아니다. 틀린 값 $3\sqrt{5}$를 올바르게 고치면 $2\sqrt{5}$이다.
④ X — $4\sqrt{5}$는 최댓값과 최솟값의 합을 두 배로 센 값이다. 틀린 값 $4\sqrt{5}$를 올바르게 고치면 $2\sqrt{5}$이다.

오답 포인트

원의 중심만 이동시키고 반지름은 그대로 유지된다는 점이 핵심이다. 또한 a와 b를 구하지 않고 중심까지의 거리 $\sqrt{5}$만 선택하면 ①을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 이동 후 원의 중심과 반지름을 구하고, 기준점에서 중심까지의 거리를 d라 둔다. 기준점이 원 밖에 있으면 최댓값은 $d+r$, 최솟값은 $d-r$로 판단한다.

암기 포인트

원 밖의 한 점에서 원까지의 최장·최단 거리는 $d+r$, $d-r$이고, 두 거리의 합은 $2d$이다.

NoteBase

문 8. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 유리함수 $f(x)=\frac{kx+1}{x+2}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프에서 두 점근선의 교점이 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{7}{2}$
② $\frac{5}{4}$
③ $\frac{7}{4}$
④ $\frac{6}{5}$

정답 1번

출제 포인트

유리함수의 두 점근선을 평행이동한 뒤 그 교점의 좌표를 구하고, 그 점이 원래 함수의 그래프 위에 있다는 조건으로 상수 k를 결정하는 문제이다.

조건 정리

$f(x)=\frac{kx+1}{x+2}=k+\frac{1-2k}{x+2}$이므로 원래 그래프의 점근선은 $x=-2, y=k$이다. 이를 왼쪽으로 2만큼, 위로 3만큼 평행이동하면 $y=g(x)$의 점근선은 $x=-4, y=k+3$이 된다. 따라서 두 점근선의 교점은 $(-4, k+3)$이다.

사용할 공식

그래프 $y=f(x)$를 x축 방향으로 a, y축 방향으로 b만큼 평행이동하면 새 함수는 $y=f(x-a)+b$이다. 이 문제에서는 $a=-2, b=3$이므로 세로점근선은 $x=-2-2=-4$, 가로점근선은 $y=k+3$으로 이동한다.

계산 과정

교점 $(-4, k+3)$이 $y=f(x)$의 그래프 위에 있으므로 $k+3=f(-4)$이다.
$f(-4)=\frac{-4k+1}{-4+2}=2k-\frac{1}{2}$
따라서
$k+3=2k-\frac{1}{2}$
이고, 이를 풀면 $k=\frac{7}{2}$이다.

선지 판단

① O — $k=\frac{7}{2}$이면 점근선의 교점의 y좌표와 $f(-4)$가 모두 $\frac{13}{2}$이므로 조건을 만족한다.
② X — $k=\frac{5}{4}$이면 $k+3=\frac{17}{4}$이지만 $f(-4)=2$이므로 조건을 만족하지 않는다. $\frac{5}{4}$가 아니라 $\frac{7}{2}$가 맞다.
③ X — $k=\frac{7}{4}$이면 $k+3=\frac{19}{4}$이지만 $f(-4)=3$이므로 조건을 만족하지 않는다. $\frac{7}{4}$가 아니라 $\frac{7}{2}$가 맞다.
④ X — $k=\frac{6}{5}$이면 $k+3=\frac{21}{5}$이지만 $f(-4)=\frac{19}{10}$이므로 조건을 만족하지 않는다. $\frac{6}{5}$가 아니라 $\frac{7}{2}$가 맞다.

NoteBase

오답 포인트

‘x축의 방향으로 -2만큼’은 그래프를 왼쪽으로 2만큼 옮긴다는 뜻이다. 따라서 세로점근선 $x=-2$는 $x=-4$가 된다. 또한 점근선의 교점이 놓이는 대상은 이동한 그래프가 아니라 원래 그래프 $y=f(x)$이므로 $k+3=f(-4)$를 세워야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

유리함수 평행이동 문제에서는 먼저 원래 점근선을 구하고, 각 점근선에 이동량을 그대로 적용해 교점을 찾은 뒤, 그 교점이 어느 그래프 위에 있다는 조건인지 확인하여 좌표를 대입한다.

암기 포인트

점근선도 그래프와 함께 같은 방향과 같은 거리만큼 평행이동한다.

NoteBase

문 9. 이차방정식 $x^2+x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha^2)(k-\beta^2)$의 값은?

① 215

② 220

③ 230

④ 235

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용해 두 근의 대칭식을 정리한 뒤 수열의 합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 방정식은 $x^2+x-1=0$이고 두 근은 α, β이다. 구해야 할 값은 $\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha^2)(k-\beta^2)$이다. 각 항을 전개할 때 $\alpha^2+\beta^2$와 $\alpha^2\beta^2$를 먼저 구해야 한다.

사용할 공식

근과 계수의 관계에 따라 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-1$이다. 따라서

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta, \qquad \alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2$

를 사용한다. 합과 곱으로 두 근의 제곱에 관한 대칭식을 바로 나타낼 수 있기 때문이다. 또한 $\sum_{k=1}^{10}k=55$, $\sum_{k=1}^{10}k^2=385$를 사용한다.

계산 과정

1. $\alpha^2+\beta^2=(-1)^2-2(-1)=3, \alpha^2\beta^2=(-1)^2=1$이다.

2. 일반항을 전개하면

$(k-\alpha^2)(k-\beta^2)=k^2-k(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2\beta^2=k^2-3k+1$

이다.

3. 따라서

$\sum_{k=1}^{10}(k^2-3k+1)=385-3\cdot 55+10=230$

이다.

선지 판단

① X — 215는 계산 결과 230과 다르다. 틀린 값 215는 올바르게는 230이다.

② X — 220은 계산 결과 230과 다르다. 틀린 값 220은 올바르게는 230이다.

③ O — 230은 식을 합한 결과와 일치한다.

④ X — 235는 계산 결과 230과 다르다. 틀린 값 235는 올바르게는 230이다.

NoteBase

오답 포인트

$\alpha\beta = -1$이므로 $\alpha^2\beta^2 = 1$이다. 제곱 뒤에도 곱을 -1로 두거나, 상수항 1을 10번 더한다는 점을 빠뜨리면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 근이 포함된 식은 근을 직접 구하기보다 근과 계수의 관계로 합과 곱을 구하고, 대칭식을 정리한 다음 시그마 공식을 적용한다.

암기 포인트

두 근의 제곱합은 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$, 제곱의 곱은 $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$이다.

NoteBase

문 10. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+7)$이 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})$의 값은?

① $-\frac{14}{3}$

② $-\frac{16}{3}$

③ $\frac{17}{3}$

④ $\frac{18}{3}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 급수의 수렴에 필요한 조건인 '일반항의 극한은 0이다'를 이용하여 수열의 극한을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+7)$이 수렴한다.
구해야 할 값: $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})$
주의할 조건: 급수가 수렴하면 그 일반항은 반드시 0으로 수렴하지만, 일반항이 0으로 수렴한다는 사실만으로 급수의 수렴이 보장되는 것은 아니다.

사용할 공식

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면
$\lim_{n\to\infty}b_n=0$
이다. 여기서는 $b_n=3a_n+7$이므로 이 필요조건을 적용한다.

계산 과정

1. 급수의 수렴 조건에서 $\lim_{n\to\infty}(3a_n+7)=0$이다.
2. 따라서 $3\lim_{n\to\infty}a_n+7=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{7}{3}$이다.
3. 첨자를 유한하게 이동해도 극한은 같으므로 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=-\frac{7}{3}$이다.
4. 그러므로
$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2})=-\frac{7}{3}-\frac{7}{3}=-\frac{14}{3}$
이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 $-\frac{14}{3}$이므로 옳다.
② X — $-\frac{16}{3}$은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $-\frac{16}{3}$ → 올바른 값은 $-\frac{14}{3}$이다.
③ X — 두 항의 극한은 모두 음수이므로 양수 $\frac{17}{3}$이 될 수 없다. 틀린 값 $\frac{17}{3}$ → 올바른 값은 $-\frac{14}{3}$이다.
④ X — $\frac{18}{3}=6$은 계산 결과와 다르고 부호도 잘못되었다. 틀린 값 $\frac{18}{3}$ → 올바른 값은 $-\frac{14}{3}$이다.

NoteBase

오답 포인트

급수 전체의 합을 구하려 하거나 $a_n \to 0$으로 착각하기 쉽다. 0으로 가는 것은 a_n이 아니라 급수의 일반항 $3a_n + 7$이므로 $a_n \to -\frac{7}{3}$이다. 또한 a_{n+1}과 a_{n+2}의 극한을 모두 더해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

급수의 수렴이 주어지면 먼저 급수의 일반항을 0으로 보낸다. 그 식에서 수열 자체의 극한을 구한 뒤, 첨자가 이동한 각 항의 극한을 대입하여 계산한다.

암기 포인트

$\sum b_n$ 수렴 $\to b_n \to 0$, 그리고 $a_n \to L$이면 $a_{n+k} \to L$이다.

NoteBase

문 11. $\log_3(-n^3+15n^2-66n+80)$**의 값이 존재하도록 하는 모든 자연수** n**의 값의 합은?**

① 8

② 10

③ 12

④ 14

정답 4번

출제 포인트

로그의 진수가 양수여야 한다는 조건을 이용하여 자연수 n의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $\log_3(-n^3+15n^2-66n+80)$
구해야 할 값: 로그의 값이 존재하게 하는 모든 자연수 n의 합
주의할 조건: 밑 3은 양수이고 1이 아니므로, 진수만 양수이면 로그가 존재한다.

사용할 공식

실수 범위에서 $\log_a M$이 존재하려면 $a>0, a\neq 1, M>0$이어야 한다. 이 문제에서는 밑이 3이므로 진수 조건

$$-n^3+15n^2-66n+80>0$$

만 판단하면 된다.

계산 과정

1. 진수를 인수분해하면

$$-n^3+15n^2-66n+80=-(n-2)(n-5)(n-8)$$

이다.
2. 따라서 $-(n-2)(n-5)(n-8)>0$, 즉 $(n-2)(n-5)(n-8)<0$을 푼다.
3. 경계값 2,5,8을 기준으로 부호를 조사하면 $n<2$ 또는 $5<n<8$에서 곱이 음수이다. 경계값에서는 진수가 0이므로 제외된다.
4. 자연수 조건을 적용하면 $n=1, 6, 7$이고, 그 합은 $1+6+7=14$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 8은 가능한 자연수 1,6,7의 합이 아니다. 틀린 값 8은 올바르게는 14이다.
② X — 10은 가능한 자연수 1,6,7의 합이 아니다. 틀린 값 10은 올바르게는 14이다.
③ X — 12는 가능한 자연수 1,6,7의 합이 아니다. 틀린 값 12는 올바르게는 14이다.
④ O — 가능한 자연수는 1,6,7이고 합이 14이므로 옳다.

오답 포인트

인수분해식 앞의 음수를 빠뜨리면 부등호의 부호 구간을 반대로 고르게 된다. 또한 $n = 2, 5, 8$에서는 진수가 0인데, 로그의 진수는 0이 아니라 양수여야 하므로 세 값은 포함되지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

로그의 존재 조건을 먼저 진수 > 0으로 바꾸고, 진수를 인수분해한 뒤 각 근을 기준으로 부호 구간을 나눈다. 마지막에 자연수 조건과 경계값 포함 여부를 확인한다.

암기 포인트

로그의 존재 조건은 밑 > 0, 밑 $\neq 1$, 진수 > 0이다.

NoteBase

문 12. 이차방정식 $x^2-4x+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2\beta}-\sqrt{x+2\alpha}\right)$의 값은?(단, $\alpha<\beta$)

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 2

④ $2\sqrt{2}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 근을 구한 뒤, 무리식의 차를 유리화하여 극한값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

이차방정식의 두 근은 $\alpha=2-\sqrt{2}, \beta=2+\sqrt{2}$이다. 따라서 $\alpha<\beta$이고, 두 근의 차는 $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$이다.
구해야 할 값은 $x\to\infty$일 때 주어진 무리식의 극한이다.

사용할 공식

무리식의 차에는 $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$를 사용한다. 두 제곱근이 각각 무한대로 발산하므로, 차의 극한을 구하려면 켤레식을 곱해 상쇄되는 항과 남는 항을 확인해야 한다.

계산 과정

먼저 $x^2-4x+2=0$을 풀면 $x=2\pm\sqrt{2}$이므로 $\alpha=2-\sqrt{2}, \beta=2+\sqrt{2}$이다. 주어진 식을 유리화하면
$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2\beta}-\sqrt{x+2\alpha}\right)=\frac{2(\beta-\alpha)\sqrt{x}}{\sqrt{x+2\beta}+\sqrt{x+2\alpha}}$.
분자와 분모를 $\sqrt{x}$로 나누면
$\frac{2(\beta-\alpha)}{\sqrt{1+\frac{2\beta}{x}}+\sqrt{1+\frac{2\alpha}{x}}}\to\frac{2(\beta-\alpha)}{2}=\beta-\alpha$.
따라서 극한값은 $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$이다.

선지 판단

① X — 극한값은 1이 아니다. 유리화한 뒤 얻는 값은 $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$이므로, 올바른 값은 $2\sqrt{2}$이다.
② X — 극한값은 $\sqrt{2}$가 아니다. 이는 두 근의 차 $2\sqrt{2}$에서 계수 2를 누락한 값이며, 올바른 값은 $2\sqrt{2}$이다.
③ X — 극한값은 2가 아니다. 두 근의 차에 포함된 $\sqrt{2}$를 누락한 값이며, 올바른 값은 $2\sqrt{2}$이다.
④ O — 계산 결과 $2\sqrt{2}$와 일치한다. 따라서 정답은 4번이다.

NoteBase

오답 포인트

유리화 과정에서 분자 $2(\beta-\alpha)$만 보고 극한값도 그와 같다고 판단하면 안 된다. 분모가 $2\sqrt{x}$와 같은 크기로 증가하므로 바깥의 $\sqrt{x}$와 함께 정리하면 최종적으로 $\beta-\alpha$가 남는다. 또한 $\beta-\alpha=(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$에서 두 번째 괄호 앞의 음수를 정확히 분배해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

제곱근의 차가 포함된 극한은 먼저 켤레식으로 유리화하고, 분자와 분모를 지배항의 크기로 나눈 뒤 극한을 계산한다. 이 문제에서는 근을 먼저 구하고 $\beta-\alpha$를 정확히 계산하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

$\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}$는 유리화하면 차이 $a-b$가 드러난다. 이 문제의 핵심값은 두 근의 차 $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$이다.

NoteBase

문 13. 함수 f(x)=casesx,&|x|≥ 1\\-x,&|x|<1cases에 대하여 두 함수 $g(x), h(x)$가
$g(x) = (f(x))^2, \quad h(x) = (x-1)f(x)$
일 때, 함수 $g(x)$의 불연속인 점의 개수를 a, 함수 $h(x)$의 불연속인 점의 개수를 b라 하자. 이때 $a+b$의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

정답 2번

출제 포인트

불연속인 함수에 제곱이나 다른 인수를 곱했을 때, 원래의 불연속점이 없어지는지를 좌우극한과 함숫값으로 판단하는 문제이다.

조건 정리

함수 f는 $x=-1$과 $x=1$에서 식이 바뀐다. 따라서 두 점에서만 g와 h의 연속성을 확인하면 된다. 구해야 할 값은 $a+b$이다.

사용할 공식

함수 F가 $x=c$에서 연속이려면
$\lim_{x\to c^-} F(x) = \lim_{x\to c^+} F(x) = F(c)$
가 성립해야 한다. 구간별 함수의 경계점에서는 좌극한, 우극한, 함숫값을 비교해야 하므로 이 기준을 사용한다.

계산 과정

1. 모든 x에서 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=-x$이므로 $g(x)=(f(x))^2=x^2$이다. 따라서 g는 모든 실수에서 연속이고 $a=0$이다.
2. $h(x)=(x-1)f(x)$이다. $x=-1$에서 좌극한은 $(-1-1)(-1)=2$, 우극한은 $(-1-1)(1)=-2$이므로 서로 다르다. 따라서 $x=-1$에서 불연속이다.
3. $x=1$에서는 $x-1$이 0으로 수렴하므로 좌극한과 우극한이 모두 0이고, $h(1)=0$이다. 따라서 $x=1$에서는 연속이다. 그러므로 $b=1$이다.
4. 따라서 $a+b=0+1=1$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 0은 h가 $x=-1$에서 불연속이라는 사실을 빠뜨린 값이다. 틀린 값 0은 올바르게는 1이다.
② O — $a=0, b=1$이므로 $a+b=1$이다.
③ X — 2는 h가 $x=-1$과 $x=1$에서 모두 불연속이라고 잘못 센 값이다. $x=1$에서는 인수 $x-1$ 때문에 불연속이 제거되므로 올바른 값은 1이다.
④ X — 3은 제곱한 g에도 f의 두 불연속점이 그대로 남고 h에는 한 점이 남는다고 잘못 센 값이다. 실제로 $g(x)=x^2$이므로 $a=0$이고, 올바른 값은 1이다.

오답 포인트

원래 함수 f가 불연속이라고 해서 $(f(x))^2$이나 $(x-1)f(x)$도 반드시 그 점에서 불연속인 것은 아니다. 이 문제에서는 제곱이 f의 부호 차이를 없애고, 인수 $x-1$이 $x=1$에서 좌우의 차이를 0으로 만든다.

다시 나오면 이렇게 판단

구간별 함수가 바뀌는 경계점을 먼저 찾고, 변형된 함수 자체의 좌극한·우극한·함숫값을 각각 비교한다. 원래 함수의 불연속점 개수를 변형된 함수에 그대로 적용하지 않는다.

암기 포인트

제곱은 부호 차이를 없앨 수 있고, 0으로 가는 인수는 유한한 점프 불연속을 없앨 수 있다.

NoteBase

문 14. 점 $A(1,\ -2)$에서 곡선 $y=x^2+x$에 그은 접선은 2개 있다. 그 2개의 접선의 방정식을 각각 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$라 할 때, $f_1(2)+f_2(2)$의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 곡선 위의 접점을 매개변수로 두고, 그 접선이 주어진 점을 지난다는 조건으로 두 접선을 구한 뒤 함숫값의 합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 곡선은 $y=x^2+x$이고, 두 접선은 모두 점 $A(1,\ -2)$를 지난다. 접점의 x좌표를 t라 두어 가능한 t를 구한 다음, 각 접선에서 $x=2$일 때의 값을 더한다.

사용할 공식

곡선 $y=x^2+x$의 도함수는 $y'=2x+1$이므로, $x=t$에서의 접선 기울기는 $2t+1$이다. 접점 t에서의 접선은

$$y=(t^2+t)+(2t+1)(x-t)=(2t+1)x-t^2$$

이다. 접선이 점 $A(1,\ -2)$를 지나야 하므로 이 식에 $x=1, y=-2$를 대입한다.

NoteBase

계산 과정

1. 점 $A(1,\ -2)$를 접선 식에 대입하면
$-2 = (2t+1) - t^2$
이므로
$t^2 - 2t - 3 = 0$
이다.
2. 인수분해하면
$(t-3)(t+1) = 0$
이므로 두 접점의 x좌표는 $t = 3, t = -1$이다.
3. $t = 3$일 때 접선은 $y = 7x - 9$이므로 $f_1(2) = 5$이고, $t = -1$일 때 접선은 $y = -x - 1$이므로 $f_2(2) = -3$이다. 두 접선의 이름을 반대로 붙여도 합은 같다.
4. 따라서
$f_1(2) + f_2(2) = 5 + (-3) = 2$
이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 2이므로 옳다.
② X — 선지의 4는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 2이다.
③ X — 선지의 6은 계산 결과와 다르다. 6은 두 접선의 기울기 7과 -1의 합이며, 문제에서 요구한 두 함숫값의 합은 2이다. 올바른 값은 2이다.
④ X — 선지의 8은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 2이다.

오답 포인트

점 $A(1,\ -2)$는 곡선 위의 점이 아니라 두 접선이 공통으로 지나는 외부의 점이다. 따라서 A에서 미분하는 것이 아니라, 곡선 위의 접점 t를 따로 두어야 한다. 또한 두 접선의 기울기 합 6을 $f_1(2) + f_2(2)$로 착각하면 ③을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

곡선 밖의 한 점에서 그은 접선 문제는 접점의 좌표를 t로 두고 '접점에서의 미분계수 = 접선의 기울기'를 이용해 접선식을 만든 뒤, 주어진 점을 대입하여 가능한 t를 결정한다.

암기 포인트

곡선 $y = x^2 + x$의 $x = t$에서의 접선은 $y = (2t+1)x - t^2$이다. 곡선 밖의 점을 지나는 접선은 이 식에 그 점의 좌표를 대입해 접점 t를 구한다.

NoteBase

문 15. $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$**인 실수** a**에 대하여, 함수** $f(x) = (x^2 - 2)(x - a)$**는 극댓값** $f(\alpha)$**와 극솟값** $f(\beta)$**를 갖는다.** $\alpha + \beta = \frac{2}{3}$**일 때,** $f(3\alpha\beta)$**의 값은?**

① 2

② -2

③ -6

④ -10

정답 3번

출제 포인트

도함수의 두 근이 극댓값과 극솟값을 갖는 점의 x좌표임을 이용하고, 근과 계수의 관계로 a, $\alpha\beta$를 구하는 문제이다.

조건 정리

함수는 $f(x) = (x^2 - 2)(x - a) = x^3 - ax^2 - 2x + 2a$이다.
극댓값과 극솟값을 갖는 점의 x좌표는 각각 α, β이고, $\alpha + \beta = \frac{2}{3}$이다.
구해야 할 값은 $f(3\alpha\beta)$이다.

사용할 공식

$f'(x) = 3x^2 - 2ax - 2$이므로 α, β는 방정식 $3x^2 - 2ax - 2 = 0$의 두 근이다.
이차방정식 $Ax^2 + Bx + C = 0$의 두 근의 합과 곱은 각각 $-\frac{B}{A}, \frac{C}{A}$이므로
$\alpha + \beta = \frac{2a}{3}, \qquad \alpha\beta = -\frac{2}{3}.$
극값을 갖는 점에서는 도함수가 0이 되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. $\alpha + \beta = \frac{2a}{3} = \frac{2}{3}$이므로 $a = 1$이다.
2. $\alpha\beta = -\frac{2}{3}$이므로 $3\alpha\beta = -2$이다.
3. 따라서
$f(3\alpha\beta) = f(-2) = ((-2)^2 - 2)(-2 - 1) = 2 \cdot (-3) = -6.$

NoteBase

선지 판단

① X — $x=-2$를 대입하면 첫 번째 인수 x^2-2만 2이고, 여기에 $x-a=-3$을 곱해야 한다. 따라서 2가 아니라 -6이다.
② X — -2는 $3\alpha\beta$, 즉 함수에 넣는 입력값이다. 함숫값은 $f(-2)=-6$이다.
③ O — 근과 계수의 관계로 얻은 $a=1$, $3\alpha\beta=-2$를 대입하면 $f(-2)=-6$이다.
④ X — 직접 계산한 값은 -10이 아니라 $(-2)^2-2$와 $-2-1$의 곱인 -6이다.

오답 포인트

②의 -2는 최종 함숫값이 아니라 f에 대입할 값이라는 점이 핵심 함정이다. 또한 ①처럼 x^2-2만 계산하고 두 번째 인수 $x-a$를 빠뜨리면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

극댓값과 극솟값을 갖는 점의 좌표가 제시되면 먼저 도함수를 0으로 놓고, 두 근의 합과 곱을 근과 계수의 관계로 구한 뒤 요구된 함수의 입력값과 함숫값을 구분한다.

암기 포인트

극값의 x좌표는 $f'(x)=0$의 근이며, 입력값 $3\alpha\beta$를 구한 뒤 반드시 원래 함수 f에 다시 대입한다.

NoteBase

문 16. $\int_0^3 \frac{x^2+1}{2x+2}dx - \int_0^3 \frac{1}{y+1}dy$의 값은?

① 0
② $\frac{1}{4}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}$

정답 4번

출제 포인트

두 정적분의 적분변수는 이름만 다른 더미 변수이므로 같은 변수로 바꾼 뒤 피적분함수를 먼저 합쳐 간단히 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $\int_0^3 \frac{x^2+1}{2x+2}dx - \int_0^3 \frac{1}{y+1}dy$이다.
두 적분의 구간이 모두 0부터 3까지이며, 두 번째 적분의 y는 x로 바꾸어도 값이 변하지 않는다.

사용할 공식

같은 구간의 정적분은 $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x)-g(x))dx$로 합칠 수 있다.
적분변수를 통일하면 두 적분의 구간이 같으므로 이 공식을 적용할 수 있다.

계산 과정

두 번째 적분의 적분변수를 y에서 x로 바꾸어 한 적분으로 합친다.
aligned ∫ _0^3≤ft((x^2+1)/(2x+2)-(1)/(x+1))dx&= ∫ _0^3(x^2+1-2)/(2(x+1))
dx\\&= ∫ _0^3(x^2-1)/(2(x+1)) dx\\&= ∫ _0^3(x-1)/(2) dx.aligned
마지막 적분을 계산하면
$\left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$.

선지 판단

① X — 계산값은 0이 아니라 $\frac{3}{4}$이다. 틀린 값 0은 올바르게는 $\frac{3}{4}$로 고쳐야 한다.
② X — 계산값은 $\frac{1}{4}$이 아니라 $\frac{3}{4}$이다. 틀린 값 $\frac{1}{4}$은 올바르게는 $\frac{3}{4}$로 고쳐야 한다.
③ X — 계산값은 $\frac{1}{2}$가 아니라 $\frac{3}{4}$이다. 틀린 값 $\frac{1}{2}$는 올바르게는 $\frac{3}{4}$로 고쳐야 한다.
④ O — 피적분함수를 합쳐 계산한 값이 $\frac{3}{4}$이므로 옳다.

NoteBase

오답 포인트

두 번째 적분의 변수가 y라는 이유로 두 적분을 합칠 수 없다고 판단하기 쉽다. 정적분의 적분변수는 더미 변수이므로 변수 이름을 통일할 수 있다. 또한 $2x+2=2(x+1)$로 묶은 뒤 통분해야 하며, $x^2-1=(x-1)(x+1)$을 약분하면 계산이 간단해진다.

다시 나오면 이렇게 판단

적분 구간이 같은 두 정적분은 먼저 적분변수를 통일하고 피적분함수를 하나로 합친다. 그다음 인수분해와 약분으로 식을 단순화한 뒤 적분한다.

암기 포인트

정적분의 적분변수는 이름만 바꾸어도 값이 같고, 같은 구간의 적분은 하나로 합칠 수 있다.

NoteBase

문 17. 다항함수 $f(x)$가
$\int(f(x)-5x)dx = xf(x) - 2x^3 + 5x^2,\ f(1) = -4$
를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은?

① $-\frac{43}{4}$
② $-\frac{23}{4}$
③ $\frac{23}{4}$
④ $\frac{43}{4}$

정답 1번

출제 포인트

주어진 부정적분 등식을 미분하여 $f'(x)$를 구한 뒤, 이차함수 $f(x)$의 최솟값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 등식은 $\int(f(x)-5x)dx = xf(x) - 2x^3 + 5x^2$이고, $f(1) = -4$이다. 구해야 할 값은 다항함수 $f(x)$의 최솟값이다.

사용할 공식

등식의 양변을 미분할 때 미적분학의 기본정리와 곱의 미분법을 사용한다.

$$f(x) - 5x = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 10x$$

또한 위로 열린 이차함수의 최솟값은 완전제곱식으로 변형하여 구한다. 부정적분 등식이 모든 x에서 성립하므로 양변을 미분하면 적분상수의 영향을 없애고 $f'(x)$를 직접 구할 수 있다.

NoteBase

계산 과정

양변을 미분하고 $f(x)$를 소거하면

$-5x = xf'(x) - 6x^2 + 10x$

이므로

$xf'(x) = 6x^2 - 15x = x(6x - 15)$

이다. $f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x) = 6x - 15$이고, 따라서

$f(x) = 3x^2 - 15x + C$

이다. $f(1) = -4$를 대입하면 $3 - 15 + C = -4$이므로 $C = 8$이다. 따라서

f(x)=3x^2-15x+8=3≤ft(x-52)^2-(43)/(4)

이고, 제곱항이 0이 되는 x=52에서 최솟값은 $-\frac{43}{4}$이다.

선지 판단

① O — 계산한 최솟값이 $-\frac{43}{4}$이므로 옳다.
② X — $-\frac{23}{4}$는 x=52를 $f(x) = 3x^2 - 15x + 8$에 대입한 결과와 일치하지 않는다. 올바른 최솟값은 $-\frac{43}{4}$이다.
③ X — $\frac{23}{4}$는 부호와 크기가 모두 계산 결과와 다르다. 올바른 최솟값은 $-\frac{43}{4}$이다.
④ X — $\frac{43}{4}$는 계산된 최솟값의 부호를 반대로 쓴 값이다. 올바른 최솟값은 $-\frac{43}{4}$이다.

오답 포인트

우변의 $xf(x)$를 미분할 때 $f(x) + xf'(x)$로 계산해야 한다. 또한 완전제곱식의 상수항은 음수이므로 ④처럼 $\frac{43}{4}$로 부호를 바꾸면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수가 포함된 부정적분 등식은 먼저 양변을 미분하여 도함수를 구하고, 주어진 함수값으로 적분상수를 정한 뒤, 완전제곱식이나 꼭짓점 공식으로 최솟값을 판단한다.

암기 포인트

부정적분 등식은 미분으로 단순화하고, $(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$를 적용한다.

NoteBase

문 18. 다항함수 $f(x)$가
$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\left(\int_2^x f(t)dt - f(x)\right) = 4$
를 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은?

① -32

② -16

③ -4

④ -1

정답 2번

출제 포인트

분모와 분자가 모두 0으로 수렴하도록 하는 조건을 먼저 찾고, 미분계수의 정의 또는 로피탈의 정리를 이용해 극한값과 $f'(2)$를 연결하는 문제이다.

조건 정리

주어진 극한이 유한한 값 4이므로 분모 x^2-4가 0으로 갈 때 분자도 0으로 가야 한다. 따라서 $\int_2^2 f(t)dt - f(2) = -f(2) = 0$이므로 $f(2) = 0$이다. 구해야 할 값은 $f'(2)$이다.

사용할 공식

분자를 $N(x) = \int_2^x f(t)dt - f(x)$로 두면 미적분학의 기본정리에 따라$N'(x) = f(x) - f'(x)$이다. 또한 $(x^2-4)' = 2x$이고 $x = 2$에서 분모의 도함수는 4이므로, 주어진 0/0형 극한에 로피탈의 정리를 적용할 수 있다.

계산 과정

$4 = \lim_{x\to 2}\frac{N(x)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f'(x)}{2x} = \frac{f(2)-f'(2)}{4}$$f(2) = 0$이므로$4 = \frac{-f'(2)}{4}$이고, 따라서 $f'(2) = -16$이다.

선지 판단

① X — $f'(2) = -32$이면 극한값은 $-f'(2)/4 = 8$이 되어 주어진 값 4와 다르다. 올바른 값은 -16이다.
② O — $f'(2) = -16$이면 $-f'(2)/4 = 4$이므로 주어진 극한을 만족한다.
③ X — $f'(2) = -4$이면 극한값은 $-f'(2)/4 = 1$이 되어 4가 아니다. 올바른 값은 -16이다.
④ X — $f'(2) = -1$이면 극한값은 $-f'(2)/4 = 1/4$이 되어 4가 아니다. 올바른 값은 -16이다.

오답 포인트

분자에서 $f(x)$ 앞에 붙은 음수를 놓치면 $f'(2)$의 부호를 잘못 정하게 된다. 또한 분모를 미분한 뒤 $2x$에 $x = 2$를 대입하여 4가 된다는 점을 빠뜨리면 배수 계산이 어긋난다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가면서 전체 극한이 유한하면 먼저 분자도 0이 되는 조건을 찾는다. 그다음 적분식의 도함수와 분모의 도함수를 구해 주어진 극한값과 미지의 도함숫값을 연결한다.

암기 포인트

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$이고, 이 문항에서는 $f(2) = 0$과 $-f'(2)/4 = 4$가 핵심이다.

문 19. 검은 상자에 1부터 20까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 20개의 공이 들어 있다. 이 상자에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내 공에 적힌 수를 확인하고 공을 다시 상자에 넣는 시행을 한다. 이 시행을 2번 했을 때, 20이 적힌 공이 나올 확률은?

① $\frac{11}{100}$
② $\frac{3}{20}$
③ $\frac{19}{100}$
④ $\frac{23}{100}$

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 각 시행에서 20이 적힌 공이 나오지 않을 확률을 구한 뒤, 여사건을 이용하여 두 번의 시행 중 적어도 한 번 20이 나올 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

한 번의 시행에서는 20개의 공 중 2개를 동시에 꺼낸다.
한 시행이 끝나면 공을 다시 상자에 넣으므로 두 시행은 같은 조건에서 반복된다.
구해야 하는 것은 두 번의 시행에서 20이 적힌 공이 적어도 한 번 나올 확률이다.

사용할 공식

적어도 한 번 20이 나올 확률은 여사건을 이용하여 구한다.
P(적어도 한 번 나옴)=1-P(두 번 모두 나오지 않음)
공을 다시 넣은 뒤 다음 시행을 하므로, 두 시행에서 20이 나오지 않을 확률을 곱할 수 있다.

계산 과정

한 번의 시행에서 20이 적힌 공이 포함되지 않을 확률은 다음과 같다.
$\frac{\binom{19}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{171}{190} = \frac{9}{10}$
따라서 두 번 모두 20이 나오지 않을 확률은
$\left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$
이다. 그러므로 두 번의 시행 중 적어도 한 번 20이 나올 확률은
$1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{11}{100}$은 여사건 계산 결과와 일치하지 않는다. 올바른 확률은 $1-(\frac{9}{10})^2=\frac{19}{100}$이다.
② X — $\frac{3}{20}$은 두 번 모두 20이 나오지 않는 경우를 제외하여 구한 값이 아니다. 올바르게는 $\frac{19}{100}$이다.
③ O — $\frac{19}{100}$은 $1-\frac{81}{100}$과 같으므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — $\frac{23}{100}$은 여사건 계산 결과와 일치하지 않는다. 올바르게는 $\frac{19}{100}$이다.

오답 포인트

‘20이 나올 확률’을 두 시행에서 정확히 한 번 나올 확률로 좁혀 해석하거나, 한 시행 안에서 공을 두 번 복원추출하는 것으로 해석하면 안 된다. 한 시행에서는 2개를 동시에 꺼내고, 시행과 시행 사이에만 공을 다시 넣는다. 또한 ‘20이 나올 확률’은 두 시행 중 적어도 한 번 나오는 사건이므로 여사건을 이용한다.

다시 나오면 이렇게 판단

‘여러 번 시행했을 때 특정 결과가 나올 확률’은 먼저 ‘한 번도 나오지 않을 확률’을 구한다. 각 시행 뒤 원상복구되어 시행들이 독립이면 그 확률을 시행 횟수만큼 곱한 다음 전체 1에서 뺀다.

암기 포인트

적어도 한 번의 확률은 1-P(한 번도 없음)이다. 복원 후 반복하는 독립 시행에서는 ‘한 번도 없음’의 확률을 시행 횟수만큼 거듭제곱한다.

NoteBase

문 20. A지역 경찰공무원의 1년 평균 휴가일을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, 3.6^2)$을 따른다고 한다. A지역 경찰공무원 중에서 임의로 추출한 36명의 1년 평균 휴가일의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \geq 20) = 0.0062$일 때, m의 값은? (단, 아래의 표준정규분포표를 이용하여 구하시오.)

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 12

② 15

③ 17.5

④ 18.5

정답 4번

출제 포인트

표본평균의 분포를 표준화하고 표준정규분포표의 가운데 넓이를 이용하여 모평균 m을 구하는 문제이다.

조건 정리

모집단은 $X \sim N(m, 3.6^2)$이고 표본의 크기는 $n = 36$이다. 따라서 표본평균은 $\overline{X} \sim N(m, (3.6/\sqrt{36})^2) = N(m, 0.6^2)$을 따른다. 구해야 할 값은 $P(\overline{X} \geq 20) = 0.0062$를 만족하는 m이다.

사용할 공식

표본평균을 표준화하면 $Z = \frac{\overline{X} - m}{3.6/\sqrt{36}} = \frac{\overline{X} - m}{0.6}$이다. 모집단이 정규분포이므로 표본평균도 정규분포를 따르며, 표본평균의 표준편차는 모집단 표준편차를 $\sqrt{n}$으로 나눈 값이 된다.

NoteBase

계산 과정

주어진 확률은 오른쪽 꼬리확률 0.0062이다. 표준정규분포의 대칭성에 따라 평균 0부터 해당 z까지의 넓이는 $0.5 - 0.0062 = 0.4938$이다. 표에서 0.4938에 대응하는 값은 $z = 2.5$이다. 따라서 $\frac{20 - m}{0.6} = 2.5$이고, $20 - m = 1.5$이므로 $m = 18.5$이다.

선지 판단

① X — $m = 12$이면 $(20 - 12)/0.6 = 13.33\cdots$으로, 요구되는 표준화 값 2.5가 아니다. 12가 아니라 18.5가 되어야 한다.
② X — $m = 15$이면 $(20 - 15)/0.6 = 8.33\cdots$으로, 요구되는 표준화 값 2.5가 아니다. 15가 아니라 18.5가 되어야 한다.
③ X — $m = 17.5$이면 $(20 - 17.5)/0.6 = 4.16\cdots$으로, 요구되는 표준화 값 2.5가 아니다. 17.5가 아니라 18.5가 되어야 한다.
④ O — $m = 18.5$이면 $(20 - 18.5)/0.6 = 2.5$이고, $P(Z \geq 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$이므로 조건을 정확히 만족한다.

오답 포인트

표에 제시된 0.4938을 곧바로 오른쪽 꼬리확률로 읽으면 안 된다. 표는 $P(0 \leq Z \leq z)$를 나타내므로, 오른쪽 꼬리확률 0.0062는 $0.5 - 0.0062 = 0.4938$로 바꾼 뒤 읽어야 한다. 또한 표본평균의 표준편차는 3.6이 아니라 $3.6/\sqrt{36} = 0.6$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 표본평균의 표준편차 $\sigma/\sqrt{n}$을 구하고, 꼬리확률을 표가 제시하는 넓이로 변환하여 z값을 찾은 다음 표준화 식에서 미지의 모평균을 구한다.

암기 포인트

표본평균의 표준편차는 $\sigma/\sqrt{n}$이고, $P(0 \leq Z \leq z)$형 표에서는 오른쪽 꼬리확률을 0.5-꼬리확률로 바꾸어 찾는다.

NoteBase