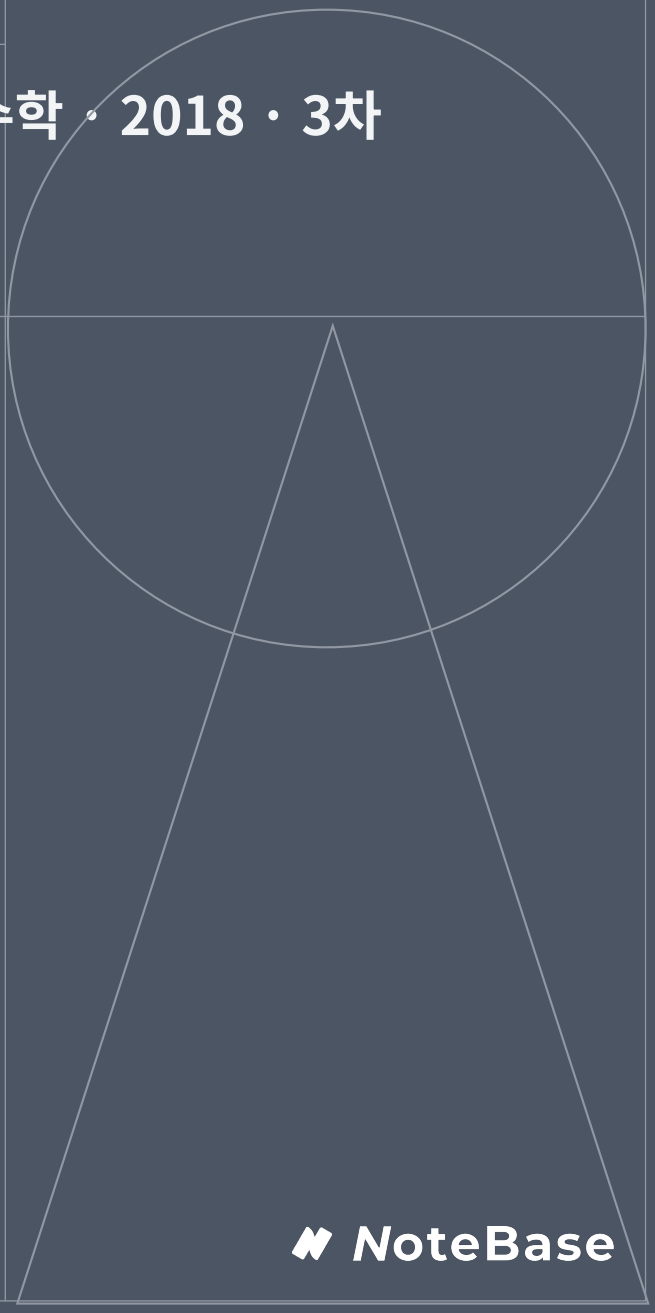
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 3차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 3차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 3차

문 1. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 2$를 인수분해하면 $(x + c)(x + 1)^2$일 때, $a + b + c$의 값은? (단, a, b, c는 상수)

① −5

② −1

③ 1

④ 5

정답 1번

출제 포인트

인수분해된 식의 상수항과 각 항의 계수를 비교하여 $a + b + c$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 등식은 $x^3 + ax^2 + bx - 2 = (x + c)(x + 1)^2$이다. 먼저 상수항을 비교해 c를 구한 뒤 우변을 전개하여 a와 b를 정한다.

사용할 공식

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
다항식의 등식에서는 같은 차수의 항끼리 계수가 각각 같다. 또한 우변의 상수항은 c이므로 좌변의 상수항 -2와 바로 비교할 수 있다.

계산 과정

1. 상수항을 비교하면 $c = -2$이다.
2. 이를 우변에 대입하여 전개한다.
$(x - 2)(x + 1)^2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = x^3 - 3x - 2$
3. $x^3 + ax^2 + bx - 2$와 계수를 비교하면 $a = 0$, $b = -3$이다.
4. 따라서 $a + b + c = 0 + (-3) + (-2) = -5$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $a+b+c=-5$이므로 옳다.
② X — $a+b+c$는 -1이 아니라 -5이다. 올바르게는 $a=0, b=-3, c=-2$를 모두 더해야 한다.
③ X — $a+b+c$는 1이 아니라 -5이다. 올바르게는 음수인 $b=-3$과 $c=-2$의 부호를 그대로 반영한다.
④ X — $a+b+c$는 5가 아니라 -5이다. 올바르게는 합의 절댓값만 취하지 않고 부호까지 포함한다.

오답 포인트

우변을 전개할 때 x^2항의 계수가 $2+c=0$이 된다는 점을 놓치거나, $b=-3, c=-2$의 음수 부호를 빠뜨리면 오답을 고르게 된다. 특히 ④의 5는 최종 합 -5의 부호를 빠뜨린 값이다.

다시 나오면 이렇게 판단

인수분해식과 전개식이 함께 주어지면 상수항처럼 바로 비교할 수 있는 항을 먼저 확인하고, 필요한 만큼 전개한 뒤 같은 차수의 계수를 비교한다.

암기 포인트

다항식의 등식은 같은 차수의 계수가 각각 같으며, 상수항 비교가 가장 빠른 출발점이다.

NoteBase

문 2. $x^8 = 100$**일 때,** $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$**의 값은?**

① 88

② 99

③ 110

④ 121

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 차의 제곱 공식 $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$을 연속으로 적용하여 주어진 곱을 $x^8 - 1$로 정리하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $x^8 = 100$
구해야 할 값: $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
주의할 조건: 각 인수를 차례로 묶어 곱하면 항들이 소거되는 구조이다.

사용할 공식

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

서로 더하고 빼는 꼴의 두 식이 연속해서 나타나므로 차의 제곱 공식을 반복하여 사용할 수 있다.

계산 과정

1. $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$이다.
2. $(x^2-1)(x^2+1) = x^4 - 1$이다.
3. $(x^4-1)(x^4+1) = x^8 - 1$이다.
4. $x^8 = 100$을 대입하면 $x^8 - 1 = 100 - 1 = 99$이다.

선지 판단

① X — 88은 계산 결과 99와 다르다. 틀린 값 88은 올바르게는 99이다.
② O — 주어진 곱은 $x^8 - 1 = 99$이므로 99가 맞다.
③ X — 110은 계산 결과 99와 다르다. 틀린 값 110은 올바르게는 99이다.
④ X — 121은 계산 결과 99와 다르다. 틀린 값 121은 올바르게는 99이다.

NoteBase

오답 포인트

주어진 $x^8 = 100$을 곱의 값으로 그대로 보는 것이 함정이다. 네 인수의 곱은 차의 제곱 공식에 따라 x^8이 아니라 $x^8 - 1$이므로 마지막에 1을 빼야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$처럼 지수가 두 배씩 커지는 인수들이 보이면 앞에서부터 차의 제곱 공식으로 묶어 x^2-1, x^4-1, x^8-1의 순서로 정리한다.

암기 포인트

$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = x^8 - 1$이다.

NoteBase

문 3. 다항식 $f(x)$를 $(3x-2)$로 나눌 때의 나머지를 r이라 하면, $xf(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눈 나머지는? (단, $r \neq 0$이다.)

① $\frac{1}{3}r$
② $\frac{2}{3}r$
③ r
④ $\frac{4}{3}r$

정답 2번

출제 포인트

나머지정리를 이용하여 $f\left(\frac{2}{3}\right)$의 값을 찾고, $xf(x)$에 다시 대입하는 문제이다.

조건 정리

$f(x)$를 $3x-2$로 나눈 나머지가 r이므로 $f\left(\frac{2}{3}\right)=r$이다. 구해야 할 값은 $xf(x)$를 $x-\frac{2}{3}$로 나눈 나머지이다.

사용할 공식

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나눈 나머지는 $P(a)$이다. 또한 $3x-2=3\left(x-\frac{2}{3}\right)$이므로 $3x-2$의 근은 $\frac{2}{3}$이다.

계산 과정

$3x-2=0$에서 $x=\frac{2}{3}$이므로 나머지정리에 따라 $f\left(\frac{2}{3}\right)=r$이다. $P(x)=xf(x)$라 두면, $P(x)$를 $x-\frac{2}{3}$로 나눈 나머지는
$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}r$
이다.

선지 판단

① X — $\frac{1}{3}r$은 계산 결과 $\frac{2}{3}r$와 다르다. 올바르게는 $\frac{2}{3}r$이다.
② O — $xf(x)$에 $x=\frac{2}{3}$을 대입하면 $\frac{2}{3}f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}r$이므로 일치한다.
③ X — r은 $f\left(\frac{2}{3}\right)$의 값일 뿐, $xf(x)$의 값이 아니다. 올바르게는 x의 값 $\frac{2}{3}$을 곱한 $\frac{2}{3}r$이다.
④ X — $\frac{4}{3}r$은 계산 결과 $\frac{2}{3}r$와 다르다. 올바르게는 $\frac{2}{3}r$이다.

오답 포인트

$f\left(\frac{2}{3}\right)=r$을 구한 뒤 $xf(x)$의 앞에 있는 x를 빠뜨리면 ③의 r을 고르게 된다. 나머지를 구할 대상이 $f(x)$가 아니라 $xf(x)$라는 점이 핵심이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

일차식으로 나누는 문제에서는 먼저 그 일차식을 0으로 만드는 값을 구한 뒤, 나머지를 구할 다항식 전체에 그 값을 대입한다.

암기 포인트

$x - a$로 나눈 나머지는 다항식 전체에 a를 대입한 값이다.

NoteBase

문 4. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 모두 자연수가 되는 실수 a의 값을 모두 합하면?

① 16

② 20

③ 24

④ 28

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 자연수 근의 가능한 순서 없는 쌍을 모두 찾고, 그때의 a를 합하는 문제이다.

조건 정리

두 자연수 근을 p, q라 하면 $p + q = a$, $pq = 12$이다. 따라서 12의 자연수 약수쌍을 빠짐없이 찾고, 각 약수쌍의 합인 a의 서로 다른 값을 모두 더해야 한다.

사용할 공식

$x^2 - (p+q)x + pq = 0$
이 공식을 쓰는 이유는 두 근이 p, q인 이차방정식을 $(x-p)(x-q) = 0$으로 인수분해하면 일차항의 계수에서 근의 합을, 상수항에서 근의 곱을 바로 알 수 있기 때문이다.

계산 과정

1. $pq = 12$를 만족하는 자연수의 순서 없는 쌍은 $(1, 12)$, $(2, 6)$, $(3, 4)$이다.
2. 각 쌍에서 $a = p + q$이므로 가능한 a는 각각 13, 8, 7이다.
3. 가능한 모든 실수 a의 합은 $13 + 8 + 7 = 28$이다.

선지 판단

① X — 16은 가능한 a의 값 13, 8, 7을 모두 더한 결과가 아니다. 16이 아니라 28로 고쳐야 한다.
② X — 20은 $13 + 8 + 7$과 일치하지 않는다. 20이 아니라 28로 고쳐야 한다.
③ X — 24는 가능한 세 값을 모두 합한 결과가 아니다. 24가 아니라 28로 고쳐야 한다.
④ O — 가능한 모든 a의 합이 $13 + 8 + 7 = 28$이므로 옳다.

오답 포인트

두 근의 곱이 12라는 조건에서 약수쌍 하나만 찾거나 $(1, 12)$와 $(12, 1)$처럼 순서만 다른 근의 쌍을 별개로 세면 틀린다. 가능한 약수쌍 세 개에서 얻은 서로 다른 a를 모두 더해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

두 근을 p, q로 두고 근과 계수의 관계로 합과 곱을 정리한 뒤, 곱을 만족하는 자연수 약수쌍을 순서 없이 모두 열거하고 요구한 값을 계산한다.

암기 포인트

$x^2 - ax + b = 0$에서 두 근의 합은 a, 곱은 b이다.

NoteBase

문 5. $z=\frac{2i}{1+i}$**일 때,** z^3-z^2+4**의 값은? (단,** $i=\sqrt{-1}$**)**

① -4

② -2

③ 0

④ 2

정답 4번

출제 포인트

복소수의 분모를 실수화하여 z를 간단히 나타낸 뒤 거듭제곱을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $z=\frac{2i}{1+i}$, $i^2=-1$
구해야 할 값: z^3-z^2+4
주의할 조건: 분모와 분자에 분모의 켤레복소수 $1-i$를 곱하고, 계산할 때 $i^2=-1$을 적용한다.

사용할 공식

분모의 실수화에는 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$를 사용한다. 따라서 $(1+i)(1-i)=2$이다. 이 공식을 쓰면 복소수인 분모가 실수가 되어 z와 그 거듭제곱을 쉽게 계산할 수 있다.

계산 과정

1. 분모와 분자에 $1-i$를 곱한다.
$z=\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i(1-i)}{2}=i-i^2=1+i$
2. z의 제곱과 세제곱을 계산한다.
$z^2=(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$
$z^3=z^2z=2i(1+i)=-2+2i$
3. 식에 대입한다.
$z^3-z^2+4=(-2+2i)-2i+4=2$

선지 판단

① X — 계산 결과는 2이므로 -4는 일치하지 않는다. 틀린 값 -4 → 올바르게는 2이다.
② X — 계산 결과는 2이므로 -2는 일치하지 않는다. 틀린 값 -2 → 올바르게는 2이다.
③ X — 계산 결과는 2이므로 0은 일치하지 않는다. 틀린 값 0 → 올바르게는 2이다.
④ O — $z^3-z^2+4=2$이므로 계산 결과와 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

$2i(1-i)=2i-2i^2=2+2i$에서 $i^2=-1$에 따른 부호 변화를 놓치기 쉽다. 또한 z^3과 z^2의 허수 부분이 서로 소거된다는 점을 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소수의 분모를 켤레복소수로 실수화한 뒤, $i^2=-1$을 적용해 낮은 차수부터 거듭제곱을 계산하고 마지막에 실수부와 허수부를 각각 정리한다.

암기 포인트

켤레복소수의 곱은 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이고, $i^2=-1$이다.

NoteBase

문 6. $-1 \le x \le 7$**에서 이차함수** $f(x) = -x^2 + 6x + a$**의 최댓값이 12일 때, 최솟값은? (단,** a**는 상수이다.)**

① −4

② −1

③ 2

④ 5

정답 1번

출제 포인트

아래로 열린 이차함수의 꼭짓점에서 최댓값을 구해 상수 a를 정한 뒤, 닫힌 구간의 양 끝점에서 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x) = -x^2 + 6x + a$이고 정의역은 $-1 \le x \le 7$이다. 구해야 할 값은 이 구간에서의 최솟값이다. 이차항의 계수가 음수이므로 그래프는 아래로 열리며, 꼭짓점의 x좌표 3이 주어진 구간 안에 있다.

사용할 공식

완전제곱식을 만들면
$f(x) = -(x-3)^2 + 9 + a$
가 된다. $-(x-3)^2 \le 0$이므로 꼭짓점 $x = 3$에서 최댓값은 $9 + a$이다. 아래로 열린 포물선의 닫힌 구간 최솟값은 양 끝점의 함숫값을 비교하여 구한다.

계산 과정

1. 최댓값 조건에서 $9 + a = 12$이므로 $a = 3$이다.
2. 왼쪽 끝점에서는 $f(-1) = -(-1)^2 + 6(-1) + 3 = -4$이다.
3. 오른쪽 끝점에서는 $f(7) = -7^2 + 6 \cdot 7 + 3 = -4$이다.
4. 두 끝점의 함숫값이 모두 -4이므로 최솟값은 -4이다.

선지 판단

① O — 계산한 최솟값이 -4이므로 옳다.
② X — -1은 이 함수의 최솟값이 아니다. 올바르게는 최솟값이 -4이다.
③ X — 2는 이 함수의 최솟값이 아니다. 올바르게는 최솟값이 -4이다.
④ X — 5는 이 함수의 최솟값이 아니다. 올바르게는 최솟값이 -4이다.

NoteBase

오답 포인트

최댓값 12를 곧바로 a로 보거나, 꼭짓점이 최솟값을 준다고 판단하면 틀린다. 이 함수는 아래로 열리므로 꼭짓점은 최댓값을 주고, 구간 최솟값은 양 끝점에서 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

이차함수를 꼭짓점형으로 바꾸고 꼭짓점이 정의역에 포함되는지 확인한다. 위로 열린 함수는 꼭짓점이 최솟값을, 아래로 열린 함수는 꼭짓점이 최댓값을 주며, 반대쪽 극값은 구간의 양 끝점 값을 비교하여 정한다.

암기 포인트

아래로 열린 포물선은 꼭짓점에서 최대, 닫힌 구간의 양 끝점 중 작은 값이 최소이다.

NoteBase

문 7. 점 $C(2,\ -1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$인 원 위의 점 $P(3,\ 3)$에서의 접선과 점 $Q(6,\ -2)$에서의 접선이 만나는 점을 R이라 할 때, 사각형 $CQRP$의 넓이는?

① $\sqrt{17}$

② $2\sqrt{17}$

③ 17

④ 34

정답 3번

출제 포인트

원의 접선은 접점에서 그은 반지름과 수직이라는 성질을 이용해 사각형의 모양과 넓이를 구하는 문제이다.

조건 정리

중심은 $C(2,\ -1)$, 두 접점은 $P(3,\ 3)$, $Q(6,\ -2)$이고 반지름의 길이는 $\sqrt{17}$이다.
반지름 벡터는 $\vec{CP}=(1,\ 4)$, $\vec{CQ}=(4,\ -1)$이다.
구해야 할 값은 사각형 $CQRP$의 넓이이다.

사용할 공식

두 벡터의 내적이 0이면 서로 수직이다.
$\vec{CP}\cdot\vec{CQ}=1\cdot 4+4\cdot(-1)=0$
또한 원의 접선은 접점에서의 반지름과 수직이다. 따라서 P에서의 접선은 CQ와 평행하고, Q에서의 접선은 CP와 평행하므로 $CQRP$는 평행사변형이다. 두 변 CP, CQ의 길이가 모두 $\sqrt{17}$이고 서로 수직이므로 실제로는 한 변의 길이가 $\sqrt{17}$인 정사각형이다.

계산 과정

두 반지름의 길이는 다음과 같다.
$|CP|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17},\qquad |CQ|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$
따라서 사각형 $CQRP$의 넓이는
$(\sqrt{17})^2=17$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\sqrt{17}$은 정사각형의 한 변의 길이일 뿐 넓이가 아니다. 올바른 넓이는 $(\sqrt{17})^2 = 17$이다.
② X — $2\sqrt{17}$은 두 반지름의 길이를 더한 값으로, 넓이를 나타내지 않는다. 올바른 넓이는 17이다.
③ O — 한 변의 길이가 $\sqrt{17}$인 정사각형의 넓이는 $(\sqrt{17})^2 = 17$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — 34는 두 직각삼각형의 넓이를 합할 때 12를 누락하면 나오는 값이다. 각 삼각형의 넓이는 $12 \cdot 17$이므로 올바른 사각형의 넓이는 17이다.

오답 포인트

①처럼 반지름의 길이를 그대로 넓이로 고르거나, ④처럼 삼각형 넓이 공식의 12를 빠뜨리는 것이 핵심 함정이다. 접선과 반지름의 수직관계까지 이용하면 사각형이 정사각형임을 바로 확인할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

원 위의 두 점에서 그은 접선의 교점이 나오면 먼저 각 접선이 해당 반지름과 수직임을 표시한다. 이어 두 반지름의 내적과 길이를 계산하여 평행사변형·직사각형·정사각형 여부를 판정한 뒤 넓이를 구한다.

암기 포인트

접선은 반지름과 수직이다. 서로 수직이고 길이가 같은 두 반지름이 만드는 이 사각형은 정사각형이며, 넓이는 반지름의 제곱이다.

NoteBase

문 8. 세 부등식 $x \geq 1,\ y \geq 2,\ y \leq -\frac{1}{2}x + 4$를 모두 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\frac{y-1}{x}$의 최댓값은?

① $\frac{5}{2}$

② 3

③ $\frac{7}{2}$

④ 4

정답 1번

출제 포인트

연립부등식이 나타내는 영역에서 분수식의 분자와 분모가 어떻게 변하는지 분석하여 최댓값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $x \geq 1, y \geq 2, y \leq -\frac{1}{2}x + 4$이다. $2 \leq -\frac{1}{2}x + 4$이어야 하므로 $x \leq 4$이고, 따라서 $1 \leq x \leq 4$이다. 구해야 할 값은 $\frac{y-1}{x}$의 최댓값이다.

사용할 공식

$x > 0$인 상태에서 x를 고정하면 $\frac{y-1}{x}$는 y가 클수록 커진다. 따라서 각 x에서 y의 최댓값인 $y = -\frac{1}{2}x + 4$를 대입한다.

계산 과정

$\frac{y-1}{x} \leq \frac{-\frac{1}{2}x + 4 - 1}{x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{2}$

$1 \leq x \leq 4$에서 $\frac{3}{x} - \frac{1}{2}$는 x가 커질수록 작아지므로 $x = 1$일 때 최대이다. 이때 $y = -\frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$이고,

$\frac{y-1}{x} = \frac{\frac{7}{2} - 1}{1} = \frac{5}{2}$

이다.

선지 판단

① O — 계산한 최댓값이 $\frac{5}{2}$이므로 옳다.

② X — 3은 계산한 최댓값 $\frac{5}{2}$와 다르다. 틀린 값 3은 올바르게는 $\frac{5}{2}$이다.

③ X — $\frac{7}{2}$는 최댓값을 만들 때의 y값이지 $\frac{y-1}{x}$의 값이 아니다. 틀린 값 $\frac{7}{2}$는 올바르게는 $\frac{5}{2}$이다.

④ X — 4는 가능한 x의 최댓값이지 구하는 분수식의 최댓값이 아니다. 틀린 값 4는 올바르게는 $\frac{5}{2}$이다.

오답 포인트

③의 $\frac{7}{2}$는 최적점의 y값이고, ④의 4는 가능한 x의 끝값이다. 좌표의 성분이나 변수의 범위를 구한 뒤 멈추지 않고, 반드시 그 좌표를 목표식 $\frac{y-1}{x}$에 대입해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 제약식으로 변수의 범위를 정하고, 한 변수를 고정했을 때 목표식이 다른 변수에 대해 증가하는지 감소하는지 확인한다. 그 변수의 경계값을 대입해 일변수식으로 만든 뒤 구간의 끝값에서 최댓값을 비교한다.

암기 포인트

분수식의 분모가 양수이면 분자를 크게 만드는 경계를 먼저 대입하고, 남은 일변수식의 증감을 판단한다.

NoteBase

문 9. 16의 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 a, -8의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 짝수 차수 방정식과 홀수 차수 방정식의 실수인 근의 개수를 구분하여 $a+b$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: a는 $x^4=16$을 만족하는 실수 x의 개수이고, b는 $x^3=-8$을 만족하는 실수 x의 개수이다.
구해야 할 값: $a+b$이다.
주의할 조건: 모든 복소수인 근의 개수가 아니라 그중 실수인 근의 개수만 센다.

사용할 원리

양수의 짝수 제곱근 중 실수인 것은 양의 근과 음의 근 두 개이고, 음수의 홀수 제곱근 중 실수인 것은 음의 근 한 개이다.
이 원리를 쓰는 이유: 네제곱은 짝수 차수이고 세제곱은 홀수 차수이므로, 각 방정식에서 실수인 해만 구분해 세어야 하기 때문이다.

계산 과정

1. $x^4=16$에서 $2^4=16$, $(-2)^4=16$이므로 실수인 네제곱근은 2와 -2이다. 따라서 $a=2$이다.
2. $x^3=-8$에서 $(-2)^3=-8$이므로 실수인 세제곱근은 -2 하나이다. 따라서 $b=1$이다.
3. $a+b=2+1=3$이다.

선지 판단

① X — 선지의 값 1은 $a+b=3$과 다르다. 올바른 값은 3이다. 이는 세제곱근의 실수 개수 $b=1$만 반영한 값이다.
② X — 선지의 값 2는 $a+b=3$과 다르다. 올바른 값은 3이다. 이는 네제곱근의 실수 개수 $a=2$만 반영한 값이다.
③ O — $a=2$, $b=1$이므로 $a+b=3$과 일치한다.
④ X — 선지의 값 4는 $a+b=3$과 다르다. 올바른 값은 3이다. 이는 네제곱근을 모두 실수라고 잘못 세는 경우에 나올 수 있는 값이다.

NoteBase

오답 포인트

‘네제곱근이 네 개’라는 사실과 ‘실수인 네제곱근이 두 개’라는 사실을 혼동하기 쉽다. 또한 -8의 세제곱근은 복소수 전체에서는 세 개이지만 실수인 것은 -2 하나뿐이다. 이 문제에서는 차수만큼 근을 세는 것이 아니라 실수 조건을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 $x^n = A$ 꼴로 바꾼 뒤 차수 n의 홀짝과 A의 부호를 확인한다. 양수의 짝수 제곱근은 실수 두 개, 음수의 홀수 제곱근은 실수 한 개라는 기준으로 개수를 센다.

암기 포인트

양수의 짝수 제곱근은 실수 두 개 ($\pm$), 음수의 홀수 제곱근은 실수 한 개이다.

NoteBase

문 10. $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$**일 때,** $\log_{20} 30$**을** a, b**를 사용해 나타내면?**

① $\frac{1+a+b}{1+ab}$
② $\frac{2+a+ab}{1+a}$
③ $\frac{2+b+ab}{1+b}$
④ $\frac{1+a+ab}{2+ab}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 로그의 밑변환 공식과 로그의 곱셈 법칙을 이용하여 $\log_{20} 30$을 a, b로 나타내는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$이다. 따라서 $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$이다. 구해야 할 값은 $\log_{20} 30$이다.

사용할 공식

밑변환 공식은 $\log_M N = \frac{\log_k N}{\log_k M}$이다. 또한 $\log_k (XY) = \log_k X + \log_k Y$, $\log_k (X^r) = r\log_k X$이다. 20과 30을 2, 3, 5의 곱으로 분해하면 주어진 a, b를 활용할 수 있으므로 이 공식들을 사용한다.

계산 과정

밑을 2로 통일하면 다음과 같다.
$\log_{20} 30 = \frac{\log_2 30}{\log_2 20}$
먼저 $\log_2 5 = ab$이므로,
$\log_2 30 = \log_2 (2 \cdot 3 \cdot 5) = 1 + a + ab$
$\log_2 20 = \log_2 (2^2 \cdot 5) = 2 + ab$
따라서
$\log_{20} 30 = \frac{1+a+ab}{2+ab}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{1+a+b}{1+ab}$는 $\log_2 5$를 b로 잘못 놓고 $\log_2 20$의 $2\log_2 2$도 1로 처리한 식이다. 올바르게는 $\frac{1+a+ab}{2+ab}$이다.
② X — $\frac{2+a+ab}{1+a}$는 분자의 $\log_2 2$를 2로 잘못 계산하고, 분모 $\log_2 20$을 $1+a$로 잘못 나타낸 식이다. 올바르게는 $\frac{1+a+ab}{2+ab}$이다.
③ X — $\frac{2+b+ab}{1+b}$는 $\log_2 3 = a$를 반영하지 못했고 20과 30의 소인수별 로그 계수를 뒤섞은 식이다. 올바르게는 $\frac{1+a+ab}{2+ab}$이다.
④ O — $\log_2 30 = 1+a+ab$, $\log_2 20 = 2+ab$이므로 밑변환 결과와 정확히 일치한다.

오답 포인트

핵심 함정은 $b = \log_3 5$를 곧바로 $\log_2 5$로 사용하는 것이다. 밑을 2로 바꾸면 $\log_2 5 = \log_2 3 \cdot \log_3 5 = ab$이고, $20 = 2^2 \cdot 5$이므로 분모의 상수항은 1이 아니라 2이다.

다시 나오면 이렇게 판단

여러 밑의 로그가 주어지면 목표 로그를 한 밑으로 통일하고, 진수와 밑을 소인수분해한 뒤 각 로그를 주어진 문자로 치환한다. 마지막에는 밑변환 공식에서 목표 진수의 로그가 분자, 목표 밑의 로그가 분모인지 확인한다.

암기 포인트

연쇄 로그는 $\log_2 3 \cdot \log_3 5 = \log_2 5$처럼 중간 밑이 소거된다.

NoteBase

문 11. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1 - na_n$ $(n \geq 1)$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값은?

① 21

② 26

③ 31

④ 36

정답 1번

출제 포인트

부분합 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$을 도입하여 주어진 식을 부분합의 점화식으로 바꾸고, S_{10}을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $S_n = 1 - na_n$이다. 또한 수열의 항과 부분합 사이에는 $a_n = S_n - S_{n-1}$의 관계가 있다. 구해야 할 값은 $S_{10} = q/p$에서 $p+q$이다.

사용할 공식

$a_n = S_n - S_{n-1}$

이를 $S_n = 1 - na_n$에 대입하면

$S_n = 1 - n(S_n - S_{n-1})$

이므로

$(n+1)S_n = 1 + nS_{n-1}$

이다. 주어진 식이 각 항 a_n과 부분합 S_n을 함께 포함하므로, 두 양을 부분합 하나로 통일하기 위해 이 관계를 사용한다.

NoteBase

계산 과정

$n=1$일 때 $S_1=a_1$이므로 $a_1=1-a_1$, 따라서 $S_1=1/2$이다.
$T_n=1-S_n$으로 놓고 점화식을 정리하면
$(n+1)(1-T_n)=1+n(1-T_{n-1})$
$(n+1)T_n=nT_{n-1}$
이 된다. 따라서
$T_n=\frac{n}{n+1}T_{n-1}$
이고, $T_1=1/2$이므로 곱이 차례로 소거되어
$T_n=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n+1}$
이다. 그러므로
$S_n=1-T_n=\frac{n}{n+1}, \qquad S_{10}=\frac{10}{11}$
이다. 기약분수 $q/p=10/11$에서 $q=10$, $p=11$이므로 $p+q=21$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $p+q=11+10=21$이므로 옳다.
② X — 26은 계산 결과와 다르다. 26이 아니라 $p+q=21$이다.
③ X — 31은 계산 결과와 다르다. 31이 아니라 $p+q=21$이다.
④ X — 36은 계산 결과와 다르다. 36이 아니라 $p+q=21$이다.

오답 포인트

주어진 식에서 a_n을 바로 구하려고 하면 항과 부분합이 섞여 계산이 복잡해진다. $a_n=S_n-S_{n-1}$으로 바꾼 뒤 $1-S_n$을 새 수열로 두면 곱이 소거되는 구조가 드러난다. 또한 q/p에서는 q가 분자이고 p가 분모이지만, 이 문항에서는 두 수의 합을 묻기 때문에 순서를 바꾸어도 합은 달라지지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

수열의 항과 부분합이 한 식에 함께 나오면 먼저 $a_n=S_n-S_{n-1}$을 대입하여 부분합만의 점화식을 만든다. 점화식에 상수항이 있으면 그 상수에 맞추어 $T_n=c-S_n$으로 치환하고, 연속된 분수의 곱이 소거되는지 확인한다.

암기 포인트

항과 부분합의 연결식은 $a_n=S_n-S_{n-1}$이다. 이 문제에서는 $1-S_n$으로 치환하면 $T_n=\frac{n}{n+1}T_{n-1}$이 되어 망원곱으로 정리된다.

NoteBase

문 12. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n+\frac{3n^2-2}{2n+1}\right)$가 수렴할 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-a_n+1)$의 값은?

① $\frac{13}{4}$
② $\frac{15}{4}$
③ $\frac{17}{4}$
④ $\frac{19}{4}$

정답 4번

출제 포인트

수렴하는 급수의 일반항은 0으로 수렴한다는 필요조건을 이용해 수열 a_n의 극한을 구한 뒤 다항식의 극한을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n+\frac{3n^2-2}{2n+1}\right)$가 수렴한다.
구해야 할 값: $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-a_n+1)$이다.
주의할 조건: 급수의 합을 직접 구하는 것이 아니라, 수렴의 필요조건인 일반항의 극한이 0이라는 사실만 사용한다.

사용할 공식

급수 $\sum u_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$이다.
여기서 $u_n=na_n+\frac{3n^2-2}{2n+1}$로 두면 이 조건을 바로 적용할 수 있다.

계산 과정

급수의 수렴 조건에서
$na_n+\frac{3n^2-2}{2n+1}\to 0$
이다. 따라서 어떤 수열 $u_n\to 0$에 대하여
$a_n=-\frac{3n^2-2}{n(2n+1)}+\frac{u_n}{n}$
으로 쓸 수 있다. 이때
(3n^2-2)/(n(2n+1))=(3-2/n^2)/(2+1/n)→32, (u_n)/(n)→0
이므로 a_n→-32이다. 다항식은 연속이므로
_n→∞(a_n^2-a_n+1)=≤ft(-32)^2-≤ft(-32)+1=94+64+44=(19)/(4).

NoteBase

선지 판단

① X
$\frac{13}{4}$는 계산 결과 $\frac{19}{4}$와 다르다. 틀린 값 $\frac{13}{4}$는 $\frac{19}{4}$로 고쳐야 한다.

② X
$\frac{15}{4}$는 계산 결과 $\frac{19}{4}$와 다르다. 틀린 값 $\frac{15}{4}$는 $\frac{19}{4}$로 고쳐야 한다.

③ X
$\frac{17}{4}$는 계산 결과 $\frac{19}{4}$와 다르다. 틀린 값 $\frac{17}{4}$는 $\frac{19}{4}$로 고쳐야 한다.

④ O
a_n→-32를 대입하면 $a_n^2 - a_n + 1 \to \frac{19}{4}$이므로 옳다.

오답 포인트

a_n의 극한은 32가 아니라 -32이다. 특히 $a_n^2 - a_n + 1$에서 $-a_n$는 +32가 되므로 부호를 빠뜨리면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

급수의 수렴이 주어지면 먼저 일반항을 0으로 보낸다. 그 식에서 수열의 극한을 구하고, 마지막에 목표식에 대입해 부호와 분모를 검산한다.

암기 포인트

급수 수렴이면 일반항은 0으로 수렴한다. 이 문제에서는 na_n-32n이므로 a_n→-32이다.

NoteBase

문 13. 삼차함수 $f(x)$가
$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4, \quad \lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-8$
을 만족시킬 때, $f(-2)$의 값은?

① 20

② 24

③ 28

④ 32

정답 4번

출제 포인트

두 극한이 존재한다는 사실로 삼차함수의 근과 계수를 정한 뒤 함숫값을 구하는 문제이다.

조건 정리

첫째 극한에서 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지며 x^2의 계수는 4이다. 둘째 극한이 유한하려면 $f(2)=0$이어야 하므로 $x-2$도 인수이다. 구해야 할 값은 $f(-2)$이다.

사용할 공식

삼차함수를 $f(x)=x^2(ax+4)$로 둔다. 이는 $\lim_{x\to 0} f(x)/x^2 = 4$라는 조건을 반영한 식이다. 또 $\lim_{x\to 2} f(x)/(x-2)$가 유한하므로 $f(2)=0$을 적용한다.

계산 과정

$f(2)=4(2a+4)=0$이므로 $a=-2$이다. 따라서
$f(x)=x^2(-2x+4)=-2x^2(x-2)$.
이때
$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(-2x^2)=-8$
이므로 둘째 조건도 만족한다. 이제
$f(-2)=-2\cdot(-2)^2\cdot(-2-2)=32$
이다.

선지 판단

① X — 계산값은 20이 아니라 32이다. 틀린 값 20 → 올바른 값 32이다.
② X — 계산값은 24가 아니라 32이다. 틀린 값 24 → 올바른 값 32이다.
③ X — 계산값은 28이 아니라 32이다. 틀린 값 28 → 올바른 값 32이다.
④ O — $f(-2)=32$이므로 계산 결과와 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

둘째 극한의 값 -8만 보고 곧바로 함숫값으로 착각하면 안 된다. 먼저 분모가 0으로 가는데 극한이 유한하다는 점에서 $f(2)=0$을 얻고, 마지막에는 $(-2)^2=4$와 $(-2)-2=-4$의 부호를 정확히 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

다항함수를 0으로 가는 식으로 나눈 극한이 유한하면 분자의 대응 인수를 먼저 찾는다. 그 인수와 극한값으로 함수를 세운 뒤, 남은 극한 조건으로 계수를 결정하고 대입값을 계산한다.

암기 포인트

유한한 극한에서는 분모가 0이 되는 만큼 분자에도 같은 인수가 필요하다.

NoteBase

문 14. 다항함수 $f(x)$가
$f(x) = -x^2 + 2f'(1)x + 5$
를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은?

① 6

② 8

③ 10

④ 12

정답 2번

출제 포인트

주어진 함수식의 양변을 미분한 뒤 $x = 1$을 대입하여 $f'(1)$을 먼저 결정하고, 이를 원래 식에 대입해 $f(1)$을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $f(x) = -x^2 + 2f'(1)x + 5$이다. 여기서 $f'(1)$은 하나의 상수로 보고 미분한다. 구해야 할 값은 $f(1)$이다.

사용할 공식

$f'(x) = -2x + 2f'(1)$
주어진 등식이 모든 x에 대해 성립하므로 양변을 x에 관하여 미분할 수 있다. 그 뒤 $x = 1$을 대입하면 식 안의 미지수 $f'(1)$을 결정할 수 있다.

계산 과정

$a = f'(1)$이라 두면 $f'(x) = -2x + 2a$이다. 따라서
$a = f'(1) = -2 + 2a$
이므로 $a = 2$이다. 이를 원래 식에 대입하면
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 5 = -1 + 4 + 5 = 8$
이다.

선지 판단

① X — 6은 계산 결과 8과 다르다. 틀린 값 6이 아니라 올바른 값은 8이다.
② O — $f'(1) = 2$를 원래 식에 대입하면 $f(1) = 8$이므로 맞다.
③ X — 10은 계산 결과 8과 다르다. 틀린 값 10이 아니라 올바른 값은 8이다.
④ X — 12는 계산 결과 8과 다르다. 틀린 값 12가 아니라 올바른 값은 8이다.

NoteBase

오답 포인트

식에 곧바로 $x = 1$을 대입하면 $f'(1)$이 남아 값을 확정할 수 없다. 먼저 양변을 미분하고 다시 $x = 1$을 대입하여 $f'(1) = 2$를 구해야 한다. 또한 $-x^2$의 도함수는 $-2x$이며, $f'(1)$은 상수로 취급한다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수식 안에 특정 점의 도함숫값이 미지수처럼 들어 있으면 그 값을 상수로 두고 양변을 미분한 뒤, 해당 점을 대입하여 먼저 도함숫값을 결정한다. 마지막에 그 값을 원래 함수식에 대입한다.

암기 포인트

도함숫값이 함수식의 계수로 들어가면 '미분 → 해당 점 대입 → 원래 식 대입'의 순서로 계산한다.

NoteBase

문 15. 함수 $f(x)=|x|(x^2+ax+b)$가 $x=1$에서 극솟값 -1을 가질 때, 이 함수의 다른 극솟값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\frac{14}{27}$
② $-\frac{5}{27}$
③ $\frac{4}{27}$
④ $\frac{13}{27}$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 한 점에서의 함수값과 미분계수 조건으로 상수 a, b를 정한 뒤, 절댓값 때문에 달라지는 구간별 식을 미분하여 다른 극솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

$x=1>0$이므로 이 구간에서 $f(x)=x(x^2+ax+b)=x^3+ax^2+bx$이다. $x=1$에서 극솟값 -1을 가지므로 $f(1)=-1$이고 $f'(1)=0$이다. 다른 극솟값을 찾을 때에는 $x<0$에서 $|x|=-x$임을 반영해야 한다.

사용할 공식

극값을 갖는 미분 가능한 점에서는 $f'(x)=0$이다. 따라서
$1+a+b=-1, \qquad 3+2a+b=0$
을 연립한다. 절댓값 함수는 x의 부호에 따라 식이 달라지므로, 상수를 구한 뒤 각 구간에서 도함수의 부호 또는 이계도함수를 확인한다.

계산 과정

두 조건을 정리하면 $a+b=-2$, $2a+b=-3$이므로 $a=-1$, $b=-1$이다. 따라서
$f(x)=|x|(x^2-x-1)$
이다. $x<0$에서는
$f(x)=-x(x^2-x-1)=-x^3+x^2+x$
이고,
$f'(x)=-3x^2+2x+1=-(3x+1)(x-1)$
이다. 음의 구간에 속하는 임계점은 $x=-\frac{1}{3}$이다. 이때 $f''(x)=-6x+2$이므로 $f''(-\frac{1}{3})=4>0$이고 극소점이다. 그 극솟값은
$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{27}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $-\frac{14}{27}$은 계산된 다른 극솟값과 일치하지 않는다. 틀린 값 $-\frac{14}{27}$ 대신 올바른 값은 $-\frac{5}{27}$이다.
② O — $x=-\frac{1}{3}$에서의 함수값이 $-\frac{5}{27}$이고 이계도함수가 양수이므로 다른 극솟값과 일치한다.
③ X — $\frac{4}{27}$은 부호와 크기가 모두 계산 결과와 다르다. 틀린 값 $\frac{4}{27}$ 대신 올바른 값은 $-\frac{5}{27}$이다.
④ X — $\frac{13}{27}$은 계산된 다른 극솟값과 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{13}{27}$ 대신 올바른 값은 $-\frac{5}{27}$이다.

오답 포인트

$x<0$에서도 $|x|=x$로 두는 것이 핵심 함정이다. 음의 구간에서는 반드시 $|x|=-x$로 바꾸어 미분해야 하며, 임계점의 함수값만 구하지 않고 실제 극소점인지도 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 주어진 극소점의 함수값 조건과 도함수 조건을 연립하여 상수를 정한다. 그다음 절댓값의 경계인 $x=0$을 기준으로 함수를 나누고, 각 구간의 임계점과 극값 여부를 확인한다.

암기 포인트

절댓값이 곱해진 함수는 x의 부호별로 식을 나누고, 극소 조건은 함수값·도함수·극값 여부를 차례로 확인한다.

NoteBase

문 16. 두 함수 $f(x)=x^3+6x$, $g(x)=x^2+4$에 대하여 $\int_{-2}^{0}\{f(x)+g(x)\}dx+\int_{0}^{2}\{f(x)-g(x)\}dx$의 값은?

① 0

② 2

③ 4

④ 8

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 홀함수와 짝함수의 대칭적분 성질을 이용해 두 정적분의 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 f는 홀함수이고, $g(-x)=g(x)$이므로 g는 짝함수이다. 구해야 할 값은 구간 $[-2,0]$의 $f+g$ 적분과 구간 $[0,2]$의 $f-g$ 적분의 합이다.

사용할 공식

홀함수 f와 짝함수 g에 대하여 $\int_{-a}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{a}f(x)dx$, $\int_{-a}^{0}g(x)dx=\int_{0}^{a}g(x)dx$이다. 두 함수가 각각 홀함수와 짝함수이고 적분 구간이 원점에 대하여 대칭이므로 이 성질을 사용할 수 있다.

계산 과정

$\int_{-2}^{0}f(x)dx=-\int_{0}^{2}f(x)dx,\qquad \int_{-2}^{0}g(x)dx=\int_{0}^{2}g(x)dx$

따라서

aligned &∫ _-2^0\f(x)+g(x)\ dx+∫ _0^2\f(x)-g(x)\ dx \ &= -∫ _0^2f(x) dx+∫ _0^2g(x) dx+∫ _0^2f(x) dx-∫ _0^2g(x) dx \ &=0. aligned

직접 계산해도 첫 번째 적분은 $-\frac{16}{3}$, 두 번째 적분은 $\frac{16}{3}$이므로 합은 0이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 0이므로 옳다.

② X — 2는 두 적분의 합과 일치하지 않는다. 틀린 값 2가 아니라 올바른 값은 0이다.

③ X — 4는 두 적분의 합과 일치하지 않는다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 값은 0이다.

④ X — 8은 두 적분의 합과 일치하지 않는다. 틀린 값 8이 아니라 올바른 값은 0이다.

NoteBase

오답 포인트

첫 번째 적분의 구간을 $[-2, 0]$에서 $[0, 2]$로 바꿀 때 홀함수 f의 적분에는 음의 부호가 붙지만 짝함수 g의 적분값은 그대로이다. 두 함수에 같은 부호를 적용하면 상쇄 구조를 놓치게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

대칭 구간이 제시되면 먼저 각 함수의 홀짝성을 확인하고, 음의 구간 적분을 양의 구간 적분으로 바꾼 뒤 같은 항끼리 상쇄되는지 판단한다.

암기 포인트

원점 대칭 구간에서 홀함수의 좌우 적분은 부호가 반대이고, 짝함수의 좌우 적분은 같다.

NoteBase

문 17. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여
$\int_1^x f(t)dt = x^4 + ax^3 - 2ax$
를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 34

② 38

③ 42

④ 46

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 정적분의 하한과 상한이 같을 때 적분값이 0이라는 성질로 상수 a를 구하고, 미적분의 기본정리로 $f(x)$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 등식은 모든 실수 x에서 성립한다. 따라서 먼저 $x = 1$을 대입해 a를 결정한 뒤 양변을 x에 대하여 미분한다. 구해야 할 값은 $f(2)$이다.

사용할 공식

$\int_1^1 f(t)dt = 0$
$\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt = f(x)$
첫 번째 성질은 적분 구간의 길이가 0이기 때문에 사용하고, 두 번째 성질은 상한이 x인 정적분을 미분하면 피적분함수 $f(x)$가 되기 때문에 사용한다.

계산 과정

1. 주어진 등식에 $x = 1$을 대입하면
$0 = 1 + a - 2a = 1 - a$
이므로 $a = 1$이다.
2. 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$f(x) = 4x^3 + 3ax^2 - 2a$
이다.
3. $a = 1, x = 2$를 대입하면
$f(2) = 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 2 = 32 + 12 - 2 = 42$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 34는 x^3을 미분할 때 계수 3을 빠뜨려 x^2로 잘못 계산하면 나오는 값이다. '34'는 틀린 값이며, 올바른 값은 42이다.
② X — 38은 x^3을 $2x^2$으로 잘못 미분하면 나오는 값이다. '38'은 틀린 값이며, 올바른 값은 42이다.
③ O — 계산 결과 $f(2) = 42$이므로 옳다.
④ X — 46은 $-2x$의 미분값을 -2가 아니라 $+2$로 잘못 처리하면 나오는 값이다. '46'은 틀린 값이며, 올바른 값은 42이다.

오답 포인트

적분식을 곧바로 미분하기 전에 $x = 1$을 대입하여 a를 먼저 구해야 한다. 또한 x^3의 미분에서 계수 3을 빠뜨리거나 $-2x$의 부호를 바꾸면 각각 ①, ②, ④와 같은 오답이 나온다.

다시 나오면 이렇게 판단

상한이 변수인 정적분 등식에서는 먼저 상한과 하한을 같게 두어 미지의 상수를 구한 다음, 양변을 미분하고 요구된 값을 대입하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

같은 끝점이면 적분값은 0이고, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$이다.

NoteBase

문 18. 다항식 $(ax^2+\frac{1}{x})^5$의 전개식에서 x^4의 계수가 80일 때, a의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 이항정리의 일반항에서 특정 차수의 항을 찾고, 그 계수로부터 상수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $(ax^2+\frac{1}{x})^5$이고, x^4의 계수는 80이다. 전개항의 x의 지수를 먼저 4로 맞춘 뒤 그 항의 계수를 계산한다.

사용할 공식

이항정리에 따라 ax^2를 k번 선택한 항은
$\binom{5}{k}(ax^2)^k(\frac{1}{x})^{5-k}=\binom{5}{k}a^kx^{3k-5}$이다. 다섯 인수 중 ax^2를 선택하는 횟수에 따라 각 항의 차수와 계수가 결정되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

x^4의 항이 되려면 $3k-5=4$이므로 $k=3$이다. 따라서 x^4의 계수는
$\binom{5}{3}a^3=10a^3$이다. 이 값이 80이므로 $10a^3=80$, $a^3=8$, 따라서 $a=2$이다.

선지 판단

① X — $a=1$이면 x^4의 계수는 10이므로 80이 아니다. 틀린 값 1 → 올바르게는 $a=2$이다.
② O — $a=2$이면 $10a^3=10\times8=80$이 되어 조건을 만족한다.
③ X — $a=3$이면 x^4의 계수는 $10\times27=270$이므로 80이 아니다. 틀린 값 3 → 올바르게는 $a=2$이다.
④ X — $a=4$이면 x^4의 계수는 $10\times64=640$이므로 80이 아니다. 틀린 값 4 → 올바르게는 $a=2$이다.

오답 포인트

ax^2를 선택한 횟수를 k라 할 때 $1/x$의 선택 횟수는 $5-k$이다. 따라서 x의 지수는 $2k-(5-k)=3k-5$이며, 이를 $2k-(5-k)=4$로 세우지 않으면 해당 항을 잘못 찾게 된다. 또한 계수에는 조합의 수 $\binom{5}{3}=10$과 a^3이 모두 포함된다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

이항 전개에서 특정 차수의 계수를 묻는 문제는 한 항의 선택 횟수를 k로 두고 일반항을 만든 다음, 지수 조건으로 k를 정하고 계수 조건을 적용한다.

암기 포인트

특정 차수의 계수는 '일반항 작성 → 지수 맞추기 → 계수 비교'의 순서로 구한다.

NoteBase

문 19. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이때, x에 관한 일차방정식 $ax+b=0$의 해가 -1 또는 -2일 확률은?

① $\frac{1}{2}$
② $\frac{1}{3}$
③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$

정답 3번

출제 포인트

일차방정식의 해 $x=-\frac{b}{a}$가 주어진 값이 되도록 하는 순서쌍 (a, b)의 개수를 세어 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

주사위를 두 번 던진 결과는 순서가 있는 순서쌍 (a, b)이다. 각 눈은 1부터 6까지이므로 전체 경우의 수는 $6\times 6=36$이다. 구하는 사건은 방정식 $ax+b=0$의 해가 -1 또는 -2인 경우이다.

사용할 공식

$ax+b=0 \Longrightarrow x=-\frac{b}{a}$
P(사건)=사건에 해당하는 경우의 수전체 경우의 수
주사위의 눈인 a는 0이 아니므로 해를 위와 같이 나타낼 수 있고, 36개의 순서쌍은 모두 같은 확률로 나온다.

계산 과정

1. 해가 -1이면 $-\frac{b}{a}=-1$이므로 $b=a$이다. 가능한 순서쌍은 $(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)$으로 6개이다.
2. 해가 -2이면 $-\frac{b}{a}=-2$이므로 $b=2a$이다. 두 눈이 모두 1부터 6까지여야 하므로 가능한 순서쌍은 $(1,2), (2,4), (3,6)$으로 3개이다.
3. 두 조건을 동시에 만족하는 순서쌍은 없으므로 유리한 경우는 $6+3=9$개이다. 따라서 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이다.

선지 판단

① X — $\frac{1}{2}$은 계산값 $\frac{1}{4}$과 다르다. 이 선지의 값을 올바르게 고치면 $\frac{1}{4}$이다.
② X — $\frac{1}{3}$은 유리한 경우가 12개일 때의 값이지만 실제로는 9개이다. 이 선지의 값을 올바르게 고치면 $\frac{1}{4}$이다.
③ O — 유리한 순서쌍이 9개이고 전체 순서쌍이 36개이므로 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$이다.
④ X — 전체 36개의 등확률 경우에서 확률 $\frac{1}{5}$에 해당하는 경우의 수는 정수가 될 수 없으며, 실제 계산값도 $\frac{1}{4}$이다. 이 선지의 값을 올바르게 고치면 $\frac{1}{4}$이다.

NoteBase

오답 포인트

$b = 2a$에서 a를 1부터 6까지 모두 허용하면 b가 6을 넘는 경우까지 세게 된다. 또한 두 번의 주사위 결과는 (a, b)처럼 순서를 구분하며, 분모는 $6 + 6$이 아니라 $6 \times 6 = 36$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

방정식의 해 조건을 먼저 a, b의 관계식으로 바꾸고, 각 변수가 주사위 눈의 범위 안에 드는 순서쌍만 센 뒤 전체 경우의 수로 나눈다. 여러 조건을 합칠 때에는 겹치는 경우가 있는지도 확인한다.

암기 포인트

두 번 던진 주사위는 순서쌍 36개이며, $ax + b = 0$의 해는 $-\frac{b}{a}$이다.

NoteBase

문 20. 어느 고등학교 학생들의 키는 평균이 170, 표준편차가 20인 정규분포를 따른다고 한다. 이 학교 학생들을 대상으로 100명을 임의추출하여 조사한 키의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(\overline{X} \geq 175)$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 키의 단위는 cm이다.)

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.0668

② 0.0228

③ 0.0062

④ 0.0013

정답 3번

출제 포인트

모집단이 정규분포를 따를 때 표본평균의 표준편차인 표준오차를 구하고, 표본평균을 표준화하여 오른쪽 꼬리확률을 계산하는 문제이다.

조건 정리

모평균은 $\mu = 170$, 모표준편차는 $\sigma = 20$, 표본크기는 $n = 100$이다. 구해야 할 값은 $P(\overline{X} \geq 175)$이다. 표본평균의 표준편차는 모표준편차 20이 아니라 표준오차 $\sigma/\sqrt{n}$이다.

NoteBase

사용할 공식

표본평균의 분포와 표준화 공식은 다음과 같다.
$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right), \qquad Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
모집단이 정규분포를 따르므로 표본크기와 관계없이 표본평균도 정규분포를 따르며, 표준정규분포표를 사용하기 위해 표준화한다.

계산 과정

1. 표본평균의 표준오차는 $20/\sqrt{100} = 2cm$이다.
2. $\overline{X} = 175$를 표준화하면 $z = (175 - 170)/2 = 2.5$이다.
3. 표에서 $P(0 \le Z \le 2.5) = 0.4938$이므로, 대칭인 표준정규분포의 오른쪽 절반 넓이 0.5에서 이를 뺀다.

$P(\overline{X} \ge 175) = P(Z \ge 2.5) = 0.5 - 0.4938 = 0.0062$

선지 판단

① X — 0.0668은 $z = 1.5$의 오른쪽 꼬리확률 $0.5 - 0.4332$이다. 이 문제의 표준화값은 1.5가 아니라 2.5이므로, 0.0668 → 올바르게는 0.0062이다.
② X — 0.0228은 $z = 2.0$의 오른쪽 꼬리확률 $0.5 - 0.4772$이다. 이 문제의 표준화값은 2.0이 아니라 2.5이므로, 0.0228 → 올바르게는 0.0062이다.
③ O — $z = 2.5$일 때 오른쪽 꼬리확률은 $0.5 - 0.4938 = 0.0062$이다.
④ X — 0.0013은 $z = 3.0$의 오른쪽 꼬리확률 $0.5 - 0.4987$이다. 이 문제의 표준화값은 3.0이 아니라 2.5이므로, 0.0013 → 올바르게는 0.0062이다.

오답 포인트

표의 값 0.4938은 $P(Z \le 2.5)$가 아니라 $P(0 \le Z \le 2.5)$이다. 따라서 오른쪽 꼬리확률은 $1 - 0.4938$이 아니라 $0.5 - 0.4938$로 계산한다. 또한 표준화할 때 모표준편차 20이 아니라 표준오차 2를 사용한다.

다시 나오면 이렇게 판단

표본평균의 확률은 먼저 표준오차 $\sigma/\sqrt{n}$를 구하고, 경계값을 표준화한 뒤, 표가 누적확률인지 0부터의 넓이인지 확인하여 필요한 꼬리확률로 바꾸어 판단한다.

암기 포인트

표본평균의 표준화는 $Z = (\overline{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$이며, 0부터 z까지의 넓이를 주는 표에서 오른쪽 꼬리는 0.5-표의 값이다.

NoteBase