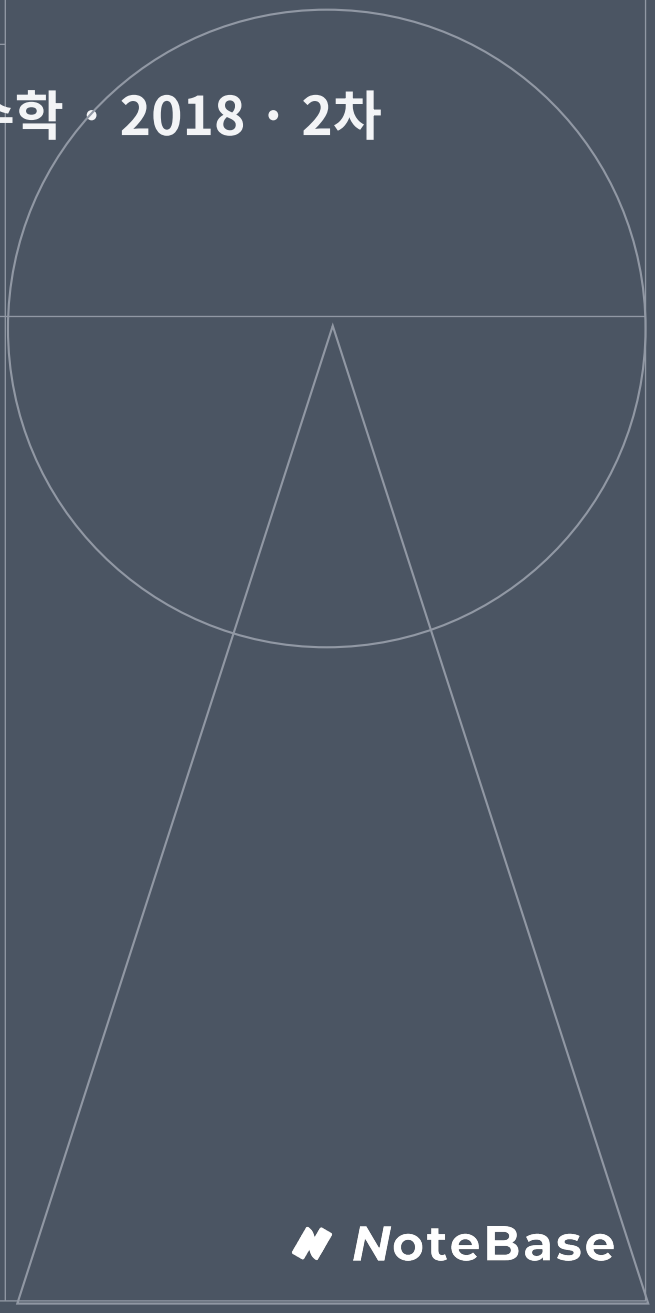
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 2차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 2차

문 1. $x = 3 + \sqrt{3},\ y = 3 - \sqrt{3}$일 때, $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$의 값은?

① 4

② 6

③ $3\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{3}$

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 두 수의 합과 곱을 이용하여 대칭식 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $x = 3 + \sqrt{3}, y = 3 - \sqrt{3}$이다.
구해야 할 값: $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$이다.
두 수의 합은 $x + y = 6$, 곱은 $xy = (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 9 - 3 = 6$이다.

사용할 공식

$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy}$
두 분수의 공통분모가 xy이고, 분자 $x^2 + y^2$는 $(x + y)^2 - 2xy$로 바꿀 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. $x + y = 6, xy = 6$을 구한다.
2. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 6^2 - 2 \cdot 6 = 24$이다.
3. 따라서 $\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{24}{6} = 4$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과가 4이므로 옳다.
② X — 6은 x^2+y^2를 $(x+y)^2$로 잘못 놓아 $\frac{36}{6}$으로 계산할 때 나오는 값이다. 6이 아니라 4이다.
③ X — 계산 결과는 $3\sqrt{3}$이 아니라 4이다. 두 근호항은 합과 곱을 이용한 대칭식 계산에서 소거된다.
④ X — 계산 결과는 $4\sqrt{3}$이 아니라 4이다. 근호가 남는 값으로 판단하는 것은 잘못이다.

오답 포인트

②의 6은 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$에서 $-2xy$를 빠뜨리면 나오는 오답이다. 또한 식이 근호를 포함하더라도 대칭식에서는 근호가 소거될 수 있으므로 ③, ④처럼 근호가 남는다고 단정하면 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

켤레 형태의 두 수가 주어진 대칭식은 각각 제곱하여 전개하기보다 먼저 $x+y$와 xy를 구하고,
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$로 변형하여 계산한다.

암기 포인트

켤레의 합에서는 근호가 사라지고, 곱에서는 차의 제곱 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$을 사용한다.

NoteBase

문 2. $x^3-1=0$**의 한 허근을** ω**라 할 때,** $\omega+\omega^3+\omega^5+\cdots+\omega^{2017}+\omega^{2019}$**을 간단히 하면?**

① 0

② ω

③ $\omega+1$

④ 1

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 $x^3-1=0$의 허근인 복소수 세제곱근 ω의 성질 $\omega^3=1, 1+\omega+\omega^2=0$을 이용하여 거듭제곱의 합을 주기적으로 묶는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: ω는 $x^3-1=0$의 허근이다.
구해야 할 값: 지수가 1부터 2019까지 2씩 증가하는 ω의 거듭제곱의 합이다.
주의할 조건: $\omega\neq1$이므로 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$에서 $\omega^2+\omega+1=0$이다.

사용할 공식

$\omega^3=1, \qquad 1+\omega+\omega^2=0$
따라서 ω의 거듭제곱은 지수를 3으로 나눈 나머지에 따라 반복된다. 지수가 2씩 증가하면 나머지가 1, 0, 2의 순서로 반복되므로 연속한 세 항의 합이 0이 된다.

계산 과정

항의 개수는 $\frac{2019-1}{2}+1=1010$개이다.
세 항씩 묶으면
$\omega^{6j+1}+\omega^{6j+3}+\omega^{6j+5}=\omega+1+\omega^2=0$
이다. $1010=3\times336+2$이므로 앞의 1008개 항은 336묶음으로 모두 상쇄된다. 남은 두 항은
$\omega^{2017}+\omega^{2019}=\omega+1$
이다. 따라서 전체 합은 $\omega+1$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 합은 0이 아니다. 앞의 1008개 항만 세 항씩 묶여 0이 되고 마지막 두 항이 남으므로, 올바른 값은 $\omega + 1$이다.
② X — $\omega^{2019} = 1$을 빠뜨리면 ω만 남는 것처럼 보인다. 마지막 두 항을 모두 포함한 올바른 값은 $\omega + 1$이다.
③ O — 336개의 세 항 묶음은 각각 0이고 나머지 두 항의 합이 $\omega + 1$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — $\omega^{2017} = \omega$를 빠뜨리면 1만 남는 것처럼 보인다. 올바른 값은 $\omega + 1$이다.

오답 포인트

전체 항의 개수 1010을 3의 배수로 잘못 보면 ①을 고르게 된다. 또한 마지막 두 항 중 $\omega^{2019} = 1$ 또는 $\omega^{2017} = \omega$ 하나만 반영하면 각각 ② 또는 ④가 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소수 세제곱근의 거듭제곱 합은 먼저 $\omega^3 = 1$로 지수를 3으로 나눈 나머지만 남기고, 세 항의 합 $1 + \omega + \omega^2 = 0$을 만든 뒤 남는 항을 계산한다.

암기 포인트

세제곱근은 3주기이며, $1 + \omega + \omega^2 = 0$이다.

NoteBase

문 3. x^{100}을 $x(x-1)(x+1)$로 나눈 나머지는?

① x^2

② x^2-1

③ x^2+1

④ x^2-x

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 다항식을 $x(x-1)(x+1)$로 나눈 나머지를 약수의 근에서의 함숫값을 이용해 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 다항식: x^{100}
나누는 다항식: $x(x-1)(x+1)$
구해야 할 값: 차수가 3보다 작은 나머지 $R(x)$
주의할 조건: 나누는 다항식의 세 근은 $-1, 0, 1$이다.

사용할 공식

$x^{100} = x(x-1)(x+1)Q(x) + R(x), \qquad \deg R < 3$
나누는 다항식의 근 $a = -1, 0, 1$을 대입하면 곱 $a(a-1)(a+1)$이 0이므로 $R(a) = a^{100}$이다. 따라서 $R(-1) = 1, R(0) = 0, R(1) = 1$을 만족하는 이차 이하의 다항식을 찾는다.

계산 과정

$R(x) = ax^2 + bx + c$로 둔다.
$R(0) = c = 0$
$R(1) = a + b = 1$
$R(-1) = a - b = 1$
마지막 두 식을 더하면 $2a = 2$이므로 $a = 1$이고, $b = 0$이다. 따라서 $R(x) = x^2$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산한 나머지 $R(x) = x^2$와 일치한다.
② X — $x = 0$에서 $x^{100} = 0$이어야 하지만 $x^2 - 1 = -1$이므로 나머지가 될 수 없다. 틀린 표현 $x^2 - 1$은 올바르게는 x^2이다.
③ X — $x = 0$에서 $x^{100} = 0$이어야 하지만 $x^2 + 1 = 1$이므로 나머지가 될 수 없다. 틀린 표현 $x^2 + 1$은 올바르게는 x^2이다.
④ X — $x = 1$에서 $x^{100} = 1$이어야 하지만 $x^2 - x = 0$이므로 나머지가 될 수 없다. 틀린 표현 $x^2 - x$는 올바르게는 x^2이다.
계산 결과가 x^2이므로 정답은 1번이다.

오답 포인트

지수가 크다고 직접 전개할 필요는 없다. 약수의 근을 대입했을 때 나머지가 원래 다항식과 같은 값을 가져야 한다는 조건을 놓치면 상수항이 붙은 ②·③이나 일차항이 붙은 ④를 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

서로 다른 일차식들의 곱으로 나눌 때는 각 일차식의 근을 원래 다항식과 나머지에 대입한다. 나머지의 차수 제한을 함께 사용해 계수를 결정하고, 모든 근에서 값이 일치하는지 검산한다.

암기 포인트

$P(x)$를 $x - a$로 나눈 나머지는 $P(a)$이며, 여러 일차식의 곱으로 나눌 때도 각 근에서 나머지의 값을 맞춘다.

NoteBase

문 4. $a > 0, b > 0$일 때, $\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b}$의 최솟값은?

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{2}$

정답 2번

출제 포인트

양수인 두 항의 곱이 1일 때 산술평균과 기하평균의 관계를 이용해 합의 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $a > 0, b > 0$이다.
구해야 할 값: $\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b}$의 최솟값이다.
두 항 $\frac{2b}{a}$, $\frac{a}{2b}$는 모두 양수이고 곱은 1이다.

사용할 공식

양수 x, y에 대하여
$x + y \geq 2\sqrt{xy}$
이고, 등호는 $x = y$일 때 성립한다. 두 항이 양수이므로 이 공식을 적용할 수 있다.

계산 과정

$\frac{2b}{a} \cdot \frac{a}{2b} = 1$
따라서 산술평균과 기하평균의 관계에 의해
$\frac{2b}{a} + \frac{a}{2b} \geq 2\sqrt{1} = 2$
이다. 등호는 $\frac{2b}{a} = \frac{a}{2b}$일 때 성립한다. 양수 조건에서 이를 정리하면 $a = 2b$이므로 실제로 등호가 성립할 수 있다.
따라서 최솟값은 2이다.

선지 판단

① X — '최솟값이 1'이라는 값은 틀리다. 두 양수 항의 곱이 1이므로 그 합은 2 이상이며, 올바른 최솟값은 2이다.
② O — 등호 조건 $a = 2b$에서 두 항이 각각 1이 되어 합이 2이므로 최솟값과 일치한다.
③ X — '최솟값이 $\frac{1}{2}$'이라는 값은 틀리다. 산술평균과 기하평균의 관계에 따른 하한은 2이므로 올바른 최솟값은 2이다.
④ X — '최솟값이 $\frac{5}{2}$'이라는 값은 틀리다. $\frac{5}{2}$는 2보다 크므로 최솟값이 될 수 없고, 올바른 최솟값은 2이다.

NoteBase

오답 포인트

두 항의 곱이 1이라는 사실만 보고 최솟값을 1로 고르거나, 두 항 중 하나의 값처럼 $\frac{1}{2}$를 고르는 것이 함정이다.
또한 부등식으로 하한만 구한 뒤 등호 조건을 확인하지 않으면 그 하한이 실제 최솟값인지 확정할 수 없다.

다시 나오면 이렇게 판단

양수인 두 항이 서로 역수 꼴이면 먼저 곱이 1인지 확인하고, $x + \frac{1}{x} \geq 2$를 적용한 뒤 등호 조건이 주어진 범위에서 가능한지 확인한다.

암기 포인트

양수 x에 대하여 $x + \frac{1}{x}$의 최솟값은 2이고, $x = 1$일 때 성립한다.

NoteBase

문 5. x**에 대한 이차부등식** $f(x) < 0$**의 해가** $2 < x < 5$**가 될 때, 부등식** $f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) < 0$**을 만족시키는 정수** x**의 개수를 구하면?**

① 5

② 6

③ 7

④ 8

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 함수의 입력값이 주어진 해의 범위에 들어가도록 연립부등식을 세워 정수해의 개수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $f(t) < 0$의 해는 $2 < t < 5$이다.
구해야 할 값: $f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) < 0$을 만족시키는 정수 x의 개수이다.
주의할 조건: 함수값이 음수가 되려면 새 입력값 $\frac{1}{2}x - 1$이 2와 5 사이에 있어야 하며, 양 끝점은 포함하지 않는다.

사용할 공식

$2 < \frac{1}{2}x - 1 < 5$
$f(t) < 0$인 입력값의 범위가 $2 < t < 5$이므로 $t = \frac{1}{2}x - 1$을 그대로 대입해 연립부등식을 세운다.

계산 과정

$2 < \frac{1}{2}x - 1 < 5$
각 변에 1을 더하면
$3 < \frac{1}{2}x < 6$
각 변에 양수 2를 곱하면 부등호 방향은 그대로이므로
$6 < x < 12$
이를 만족시키는 정수는 7, 8, 9, 10, 11의 5개이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 정수해가 7, 8, 9, 10, 11의 5개이므로 맞다.
② X — '6개'는 틀린 값이다. 올바르게는 5개이며, 끝점 6 또는 12를 포함하면 개수를 잘못 셀 수 있다.
③ X — '7개'는 틀린 값이다. 올바르게는 5개이며, 엄격부등식이므로 양 끝점 6과 12는 모두 제외된다.
④ X — '8개'는 틀린 값이다. 올바르게는 5개이며, $6 < x < 12$에 포함되는 정수만 세어야 한다.

NoteBase

오답 포인트

해의 범위 $2 < t < 5$에 함수식 전체가 아니라 입력값 $t = \frac{1}{2}x - 1$을 넣어야 한다. 또한 $6 < x < 12$는 엄격부등식이므로 6과 12를 포함하지 않는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 함수의 새 입력값을 원래 해의 범위 사이에 놓고 연립부등식을 푼 다음, 끝점의 포함 여부를 확인하여 정수만 센다.

암기 포인트

$f(g(x)) < 0$의 해는 $g(x)$가 $f(t) < 0$의 해 구간에 들어가는 x이다.

NoteBase

문 6. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = 2x + 2$가 한 점에서 접할 때, 실수 a의 값을 합하면?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이차함수의 그래프와 직선이 한 점에서 접할 때 두 식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식이 0임을 이용해 매개변수의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: 이차함수 $y = x^2 + ax + a$, 직선 $y = 2x + 2$이다.
구해야 할 값: 접하게 하는 모든 실수 a의 합이다.
주의할 조건: 두 그래프가 한 점에서 접하므로 교점의 x좌표를 정하는 이차방정식은 중근을 가지며, 판별식은 0이다.

사용할 공식

이차방정식 $Ax^2 + Bx + C = 0$이 중근을 가질 조건은 판별식 $D = B^2 - 4AC = 0$이다. 두 그래프가 한 점에서 접한다는 것은 두 식을 연립했을 때 하나의 중복된 교점을 얻는다는 뜻이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

두 식의 y값을 같게 놓으면

$x^2 + ax + a = 2x + 2$

이므로

$x^2 + (a - 2)x + (a - 2) = 0$

이다. 판별식을 0으로 놓으면

$D = (a - 2)^2 - 4(a - 2) = (a - 2)(a - 6) = 0$

이므로 $a = 2$ 또는 $a = 6$이다. 따라서 모든 실수 a의 합은 $2 + 6 = 8$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 4는 $a = 2$와 $a = 6$의 합이 아니다. 올바르게는 두 값을 모두 더한 8이다.
② X — 6은 가능한 a 중 하나만 적은 값이다. 올바르게는 $2 + 6 = 8$이다.
③ O — 판별식 조건에서 $a = 2, 6$을 얻으므로 그 합은 8이다.
④ X — 10은 두 해의 합이 아니다. 올바르게는 $2 + 6 = 8$이다.

오답 포인트

판별식 $D = 0$을 정리한 a에 관한 방정식에는 $a = 2$와 $a = 6$이라는 두 해가 있다. ②의 6처럼 한 해만 답으로 고르지 않고, 문제에서 요구한 '값을 합하면'에 따라 두 값을 더해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

함수의 그래프와 직선이 접한다는 조건이 나오면 두 식을 같게 놓아 교점 방정식을 만든 뒤 $D = 0$을 적용한다. 매개변수가 여러 개 나오면 문제에서 각각의 값, 합, 곱 중 무엇을 묻는지 마지막에 확인한다.

암기 포인트

접점 하나는 교점 방정식의 중근을 뜻하며, 중근 조건은 $D = 0$이다.

NoteBase

문 7. 두 함수 $f(x)=\log_3 x$, $g(x)=3^x$에서 $(f\circ g)(4)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$

② 1

③ 3

④ 4

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 로그함수와 지수함수가 서로 역함수라는 성질을 이용하여 합성함수의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=\log_3 x$, $g(x)=3^x$이다. 구해야 할 값은 $(f\circ g)(4)=f(g(4))$이다.

사용할 공식

$\log_a(a^x)=x \quad (a>0,\ a\neq 1)$
밑이 같은 로그함수와 지수함수는 서로 역함수이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

먼저 $g(4)=3^4$이다. 따라서
$(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(3^4)=\log_3(3^4)=4$
가 된다.

선지 판단

① X — $\frac{1}{3}$은 계산 결과 4와 다르다. 올바른 값은 $\frac{1}{3}$이 아니라 4이다.
② X — 1은 계산 결과 4와 다르다. 올바른 값은 1이 아니라 4이다.
③ X — 3은 로그의 밑일 뿐 합성함수의 값이 아니다. 올바른 값은 3이 아니라 4이다.
④ O — $\log_3(3^4)=4$이므로 계산 결과와 일치한다.

오답 포인트

$(f\circ g)(4)$를 함수값의 곱으로 보거나, 로그의 밑 3을 답으로 고르는 것이 함정이다. 합성기호 $\circ$는 곱셈이 아니라 안쪽 함수 g를 먼저 계산한 뒤 그 결과를 f에 대입한다는 뜻이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

합성함수는 안쪽 함수부터 계산하고, $\log_a(a^x) = x$ 또는 $a^{\log_a x} = x$의 역함수 관계를 적용하여 값을 판단한다.

암기 포인트

같은 밑의 로그와 지수는 합성하면 입력값으로 돌아간다: $\log_a(a^x) = x$.

NoteBase

문 8. 원 $x^2+y^2=9$와 직선 $y=\sqrt{3}x+3$이 서로 다른 두 점 P, Q에서 만날 때, 선분 PQ의 길이는?

① $3\sqrt{3}$
② $\frac{7}{2}\sqrt{3}$
③ $4\sqrt{3}$
④ $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

정답 1번

출제 포인트

원의 중심에서 직선까지의 거리를 구한 뒤, 반지름과 중심에서 현까지의 거리를 이용하여 현의 길이를 계산하는 문제이다.

조건 정리

원 $x^2+y^2=9$의 중심은 $O(0,0)$, 반지름은 $r=3$이다.
직선은 $\sqrt{3}x-y+3=0$으로 나타낼 수 있다.
선분 PQ는 이 직선이 원 안에서 만드는 현이다.

사용할 공식

점 (x_0,y_0)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는
$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
이다. 반지름이 r이고 중심에서 현까지의 거리가 d이면 현의 길이는
$2\sqrt{r^2-d^2}$
이다. 원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로 직각삼각형에 피타고라스 정리를 적용할 수 있다.

계산 과정

원의 중심 $O(0,0)$에서 직선 $\sqrt{3}x-y+3=0$까지의 거리는
$d=\frac{|3|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{3}{2}$
이다. 따라서 현의 절반의 길이는
$\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$
이다. 그러므로
$PQ=2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산한 현의 길이 $PQ = 3\sqrt{3}$과 일치한다.
② X — $\frac{7}{2}\sqrt{3}$은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $3\sqrt{3}$이다.
③ X — $4\sqrt{3}$은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $3\sqrt{3}$이다.
④ X — $\frac{9}{2}\sqrt{3}$은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $3\sqrt{3}$이다.

오답 포인트

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$는 현 전체가 아니라 현의 절반의 길이이다. 마지막에 2를 곱해야 하며, 중심에서 직선까지의 거리 $\frac{3}{2}$를 현의 길이와 혼동해서도 안 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

원의 방정식에서 중심과 반지름을 확인하고, 중심과 직선 사이의 거리 d를 구한 다음 $2\sqrt{r^2 - d^2}$에 대입하여 현의 길이를 판단한다.

암기 포인트

중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분한다. 현의 길이는 $2\sqrt{r^2 - d^2}$이다.

NoteBase

문 9. $\log 2 = 0.3010,\ \log 3 = 0.4771$**일 때,** 12^{12}**은 몇 자리의 정수인가?**

① 12

② 13

③ 14

④ 15

정답 2번

출제 포인트

상용로그를 이용하여 큰 자연수의 자릿수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $\log 2 = 0.3010, \log 3 = 0.4771$

구해야 할 값: 12^{12}의 자릿수

주의할 조건: 양의 정수 N에 대하여 $k \le \log N < k+1$이면 N은 $k+1$자리이다.

사용할 공식

$\log(a^n) = n\log a$

$\log(ab) = \log a + \log b$

$12 = 2^2 \cdot 3$이므로 주어진 $\log 2$와 $\log 3$만으로 $\log(12^{12})$를 계산할 수 있다. 계산된 상용로그의 정수 부분에 1을 더하면 자연수의 자릿수가 된다.

계산 과정

1. $\log 12 = \log(2^2 \cdot 3) = 2\log 2 + \log 3$이다.
2. $\log 12 = 2 \times 0.3010 + 0.4771 = 1.0791$이다.
3. $\log(12^{12}) = 12\log 12 = 12 \times 1.0791 = 12.9492$이다.
4. $12 < 12.9492 < 13$이므로 $10^{12} < 12^{12} < 10^{13}$이다. 따라서 12^{12}은 13자리의 정수이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 12자리가 되려면 상용로그가 11 이상 12 미만이어야 한다. 실제 값은 12.9492이므로 '12'는 틀리고, 올바르게는 13자리이다.
② O — 상용로그 12.9492의 정수 부분은 12이므로 자릿수는 $12 + 1 = 13$이다.
③ X — 14자리가 되려면 상용로그가 13 이상 14 미만이어야 한다. 실제 값은 12.9492이므로 '14'는 틀리고, 올바르게는 13자리이다.
④ X — 15자리가 되려면 상용로그가 14 이상 15 미만이어야 한다. 실제 값은 12.9492이므로 '15'는 틀리고, 올바르게는 13자리이다.

오답 포인트

$\log(12^{12}) = 12.9492$를 구한 뒤 12를 그대로 자릿수로 선택하는 것이 핵심 함정이다. 상용로그가 정수가 아닐 때 자릿수는 정수 부분보다 1 크므로 12자리가 아니라 13자리이다.

다시 나오면 이렇게 판단

큰 자연수의 자릿수 문제는 상용로그를 계산하고, 그 값의 정수 부분에 1을 더하는 순서로 판단한다. 계산값이 정수라면 해당 수가 정확히 10^k인지 경계도 확인한다.

암기 포인트

양의 정수 N의 상용로그가 정수가 아니면 N의 자릿수는 $\lfloor \log N \rfloor + 1$이다.

NoteBase

문 10. $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2018}$의 값은?

① $1-\frac{1}{2018}$
② $2\left(1-\frac{1}{2018}\right)$
③ $1-\frac{1}{2019}$
④ $2\left(1-\frac{1}{2019}\right)$

정답 4번

출제 포인트

등차수열의 합으로 각 분모를 정리한 뒤 부분분수로 분해하여 망원급수의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

제n항의 분모는 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이다. 따라서 주어진 합은 $n=1$부터 $n=2018$까지 $\frac{2}{n(n+1)}$을 더한 값이다.

사용할 공식

$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
$\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
각 항을 두 분수의 차로 바꾸면 이웃한 항끼리 소거되므로 망원급수 공식을 사용한다.

계산 과정

aligned Σ_n=1^2018(1)/(1+2+·s+n) &=Σ_n=1^2018(2)/(n(n+1))\
&=2Σ_n=1^2018≤ft((1)/(n)-(1)/(n+1))\ &=2≤ft(1-(1)/(2019)). aligned
중간의 -12+12,-13+13,⋯,-12018+12018은 모두 소거되고 처음의 1과 마지막의 -12019만 남는다.

선지 판단

① X — $1-\frac{1}{2018}$은 부분분수 분해에서 생기는 계수 2를 빠뜨렸고 마지막 분모도 잘못 잡은 값이다. 올바르게는 $2\left(1-\frac{1}{2019}\right)$이다.
② X — $2\left(1-\frac{1}{2018}\right)$은 계수 2는 반영했지만, 마지막 항 $n=2018$에서 남는 분수의 분모를 2018로 잘못 잡았다. 올바르게는 마지막 분모가 2019이므로 $2\left(1-\frac{1}{2019}\right)$이다.
③ X — $1-\frac{1}{2019}$은 소거 후 남는 두 항은 맞지만 부분분수 분해의 계수 2를 빠뜨린 값이다. 올바르게는 $2\left(1-\frac{1}{2019}\right)$이다.
④ O — 계산 결과가 $2\left(1-\frac{1}{2019}\right)$과 정확히 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

핵심 함정은 $\frac{2}{n(n+1)}$의 계수 2를 누락하는 것과, 합의 마지막 번호가 2018이라는 이유로 소거 후 남는 분모까지 2018로 쓰는 것이다. 마지막 항은 $\frac{1}{2018} - \frac{1}{2019}$이므로 끝에 남는 분모는 2019이다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 $1 + 2 + \cdots + n$이면 먼저 $\frac{n(n+1)}{2}$로 바꾸고, $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$로 분해한다. 이후 처음 항과 마지막 항을 확인하고, 앞에 붙은 계수를 마지막까지 유지한다.

암기 포인트

삼각수의 역수 합은 $\frac{2}{n(n+1)}$로 바뀌며, 1부터 N까지 더하면 $2\left(1 - \frac{1}{N+1}\right)$이다.

NoteBase

문 11. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{8(x^4-4)}{(x^2-2)f(x^2)}=4$일 때, $f(2)$의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 4번

출제 포인트

인수분해로 극한식의 공통인수를 약분하고, 다항함수의 연속성을 이용하여 $f(2)$의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{8(x^4-4)}{(x^2-2)f(x^2)}=4$이다. 구해야 할 값은 $f(2)$이다. $x\to\sqrt{2}$이면 $x^2\to 2$이고, 다항함수 f는 연속이다.

사용할 공식

$x^4-4=(x^2-2)(x^2+2)$이다. 따라서 $x\neq\sqrt{2}$인 극한 과정에서는 공통인수 x^2-2를 약분할 수 있다. 약분한 식에 다항함수의 연속성을 적용하면 $f(x^2)\to f(2)$가 된다.

계산 과정

$\frac{8(x^4-4)}{(x^2-2)f(x^2)}=\frac{8(x^2-2)(x^2+2)}{(x^2-2)f(x^2)}=\frac{8(x^2+2)}{f(x^2)}$

주어진 극한값이 유한한 4이므로 $f(2)\neq 0$이다. 따라서

$\frac{8(2+2)}{f(2)}=4$

$\frac{32}{f(2)}=4,\qquad f(2)=8$

계산 결과 $f(2)=8$이다.

선지 판단

① X — 2는 계산 결과 $f(2)=8$과 다르다. 틀린 값 2가 아니라 올바른 값은 8이다.

② X — 4는 주어진 극한값이지 $f(2)$의 값이 아니다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 값은 8이다.

③ X — 6은 방정식 $32/f(2)=4$를 만족하지 않는다. 틀린 값 6이 아니라 올바른 값은 8이다.

④ O — $32/f(2)=4$를 풀면 $f(2)=8$이므로 옳다.

오답 포인트

②의 4는 문제에 주어진 극한값을 그대로 고른 경우이다. 또한 $x=\sqrt{2}$를 약분 전에 바로 대입하면 0/0 꼴이 되므로, 먼저 x^4-4를 인수분해하여 x^2-2를 약분해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

분자와 분모가 함께 0이 되는 극한은 먼저 인수분해하여 공통인수를 약분한 뒤 대입한다. 합성된 다항함수는 연속이므로 $x^2 \to 2$일 때 $f(x^2) \to f(2)$로 처리한다.

암기 포인트

$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$처럼 차의 제곱을 먼저 인수분해하면 0/0 꼴의 공통인수가 드러난다.

NoteBase

문 12. 함수 $f(x)$가 양의 실수 x에 대하여
$2x^2 - 1 < f(x) < 2x^2 + x + 1$을 만족할 때,
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+x}{x^2-1}$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 함수의 위아래 경계식이 같은 값에 수렴함을 이용하는 샌드위치 정리로 극한값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $2x^2 - 1 < f(x) < 2x^2 + x + 1$이다. 구해야 할 값은 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+x}{x^2-1}$이다. $x \to \infty$에서는 $x^2 - 1 > 0$이므로 부등호의 방향을 유지한 채 각 변을 $x^2 - 1$로 나눌 수 있다.

사용할 공식

샌드위치 정리에 따라 $g(x) \le h(x) \le k(x)$이고 $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} k(x) = L$이면 $\lim_{x\to\infty} h(x) = L$이다. 이 문제에서는 $f(x)$의 정확한 식을 알 수 없지만, 주어진 두 경계식으로 목표 식의 위아래를 같은 극한값으로 묶을 수 있으므로 이 정리를 사용한다.

계산 과정

주어진 부등식의 각 변에 x를 더하면

$2x^2 + x - 1 < f(x) + x < 2x^2 + 2x + 1$

이다. 충분히 큰 x에 대하여 $x^2 - 1 > 0$이므로

$\frac{2x^2+x-1}{x^2-1} < \frac{f(x)+x}{x^2-1} < \frac{2x^2+2x+1}{x^2-1}$

이다. 양쪽 분수의 분자와 분모를 x^2으로 나누면 각각의 극한은 최고차항 계수의 비인 2가 된다. 따라서 샌드위치 정리에 의해

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+x}{x^2-1} = 2$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 극한값은 1이 아니라 2이다. 틀린 값 1을 올바르게 고치면 2이다.
② O — 두 경계식의 극한이 모두 2이므로 주어진 식의 극한도 2이다.
③ X — 극한값은 3이 아니라 2이다. 틀린 값 3을 올바르게 고치면 2이다.
④ X — 극한값은 4가 아니라 2이다. 틀린 값 4를 올바르게 고치면 2이다.

오답 포인트

분자와 분모의 최고차항만 볼 때 분자의 주도항은 $2x^2$, 분모의 주도항은 x^2이므로 계수의 비는 2이다. $f(x)$의 식이 하나로 정해지지 않았다는 이유로 극한을 구할 수 없다고 판단하거나, 분모의 최고차항 계수를 잘못 처리해 1을 고르는 것이 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

미지의 함수가 두 식 사이에 놓인 극한 문제에서는 먼저 목표식과 같은 형태가 되도록 부등식의 각 변을 변형한다. 나누는 식의 부호를 확인한 뒤 양쪽 경계의 극한이 같으면 샌드위치 정리를 적용한다.

암기 포인트

위아래 경계의 극한이 같으면 가운데 함수의 극한도 같다. 같은 차수의 다항식 비의 극한은 최고차항 계수의 비이다.

NoteBase

문 13. $x \geq -1$인 임의의 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$가
$(a\sqrt{x+1}-b)f(x)=x-3,\ f(3)=2$
를 만족시킬 때, 두 상수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 근호식의 차를 인수분해한 뒤 함수의 연속성과 주어진 함숫값을 이용하여 두 상수를 정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $x \geq -1$에서 $f(x)$가 연속이고, $(a\sqrt{x+1}-b)f(x)=x-3$, $f(3)=2$라는 것이다. 구해야 할 값은 $a+b$이다. 특히 $x=3$에서는 우변이 0이 되므로 먼저 계수 사이의 관계를 구하고, 약분한 식의 극한과 $f(3)$을 연결해야 한다.

사용할 공식

근호식의 차를 이용하면
$x-3=(x+1)-4=(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)$
이다. 또한 f가 $x=3$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=2$
가 성립한다. 분모와 분자에 공통으로 생기는 $\sqrt{x+1}-2$를 $x\neq 3$에서 약분한 뒤, 연속성을 이용해 $x=3$의 값을 결정할 수 있으므로 이 식들을 사용한다.

계산 과정

1. 원래 식에 $x=3$을 대입하면 $(2a-b)f(3)=0$이다. $f(3)=2$이므로 $2a-b=0$, 즉 $b=2a$이다.
2. 이를 원래 식에 대입하면 $a(\sqrt{x+1}-2)f(x)=(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)$이다.
3. $x\neq 3$에서 공통인수를 약분하면 $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+2}{a}$이다.
4. $x=3$에서의 연속성을 적용하면 $2=f(3)=\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{4}{a}$이므로 $a=2$이다. 따라서 $b=2a=4$이고, $a+b=6$이다.

NoteBase

선지 판단

① 2: X — 계산 결과는 6이므로 2는 틀린 값이다. 올바르게는 $a+b=6$이다.
② 4: X — 4는 b의 값일 뿐 두 상수의 합이 아니다. 올바르게는 $a=2, b=4$이므로 $a+b=6$이다.
③ 6: O — 연속성으로 $a=2, b=4$를 얻으므로 합은 6이다.
④ 8: X — $b=2a$를 구한 뒤 $f(3)=2$라는 연속 조건까지 적용하면 합은 8이 아니라 6이다. 올바르게는 $a+b=6$이다.

오답 포인트

핵심 함정은 $x=3$에서 $\sqrt{x+1}-2=0$이므로 그 인수를 곧바로 약분할 수 없다는 점이다. 약분식은 $x\neq 3$에서만 얻고, 마지막에 연속성을 이용하여 그 식의 극한을 $f(3)=2$와 같게 두어야 한다. 또한 ②의 4는 b만 구한 뒤 이를 합으로 착각할 때 고르기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0이 되는 점에서 함수가 연속인 유형은 먼저 그 점을 원래 식에 대입하여 상수 관계를 구하고, 그 점을 제외한 곳에서 인수분해와 약분을 한 뒤, 약분식의 극한을 주어진 함숫값과 같게 두어 판단한다.

암기 포인트

0이 되는 인수는 해당 점에서 직접 약분하지 않고, 주변에서 약분한 식의 극한과 연속인 함숫값을 연결한다.

NoteBase

문14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여
$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+6}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+a_n\right)=2018$
일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 6

정답 2번

출제 포인트

무한급수가 수렴하면 일반항이 0으로 수렴한다는 필요조건을 이용하여 수열 a_n의 극한을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 급수의 합이 2018이라는 것은 이 급수가 수렴한다는 뜻이다. 따라서 급수의 일반항 (√(n+6)+ n)/(√(n+1)+ n)+a_n은 0으로 수렴해야 한다. 구해야 할 값은 $\lim_{n\to\infty}a_n$이다.

사용할 공식

Σ_n=1^∞b_n이 수렴하면 _n→∞b_n=0 이 원리를 쓰는 이유는 주어진 무한급수가 유한한 값 2018로 수렴하기 때문이다.

계산 과정

1. 근호가 포함된 비의 분자와 분모를 n으로 나누면
(√(n+6)+ n)/(√(n+1)+ n)=(√(1+6/n)+1)/(√(1+1/n)+1)이다.
2. $n\to\infty$일 때 위 비의 극한은 $\frac{1+1}{1+1}=1$이다.
3. 급수의 일반항이 0으로 수렴해야 하므로
$1+\lim_{n\to\infty}a_n=0$이고, 따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=-1$이다.

선지 판단

① X — -2는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 -1이다.
② O — 급수의 일반항이 0으로 수렴하고 근호 비의 극한이 1이므로 a_n의 극한은 -1이다.
③ X — 0은 근호 비의 극한 1을 상쇄하지 못한다. 올바른 값은 -1이다.
④ X — 6은 근호 안의 차이에서 가져온 값일 뿐 극한값이 아니다. 올바른 값은 -1이다.

NoteBase

오답 포인트

급수의 합 2018을 일반항의 극한과 혼동하면 안 된다. 또한 근호 안의 상수 6은 n이 커질수록 $6/n$으로 작아지므로 비의 극한에 남지 않는다. 핵심은 급수의 일반항 전체가 0으로 수렴해야 한다는 점이다.

다시 나오면 이렇게 판단

무한급수의 합이 유한하게 주어지면 먼저 일반항의 극한을 0으로 놓는다. 그다음 일반항에서 이미 극한을 계산할 수 있는 부분을 구하고, 나머지 수열의 극한이 이를 상쇄하도록 정리한다.

암기 포인트

급수 수렴의 필요조건은 일반항이 0으로 수렴하는 것이다. 이 문제에서는 $1+\lim a_n=0$이므로 $\lim a_n=-1$이다.

NoteBase

문 15. 공차가 양수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 있다. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\frac{2}{3}$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-3b_n}{2a_n+3b_n}$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{4}$

③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$

정답 4번

출제 포인트

등차수열의 부분합에서 최고차항의 계수를 비교하여 두 수열의 공차의 비를 구한 뒤, 일반항으로 이루어진 식의 극한을 계산하는 문제이다.

조건 정리

두 등차수열의 공차를 각각 $d_a>0$, $d_b>0$라고 둔다. 주어진 조건은 $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\frac{2}{3}$이고, 구해야 할 값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-3b_n}{2a_n+3b_n}$이다.

사용할 공식

등차수열의 일반항과 부분합은 각각 $a_n=a_1+(n-1)d_a$, $S_n=\frac{n}{2}\{2a_1+(n-1)d_a\}$이다. 따라서 n이 커질 때 $S_n\sim\frac{d_a}{2}n^2$, $T_n\sim\frac{d_b}{2}n^2$이다. 부분합의 극한비는 최고차항의 계수비로 결정되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 부분합의 최고차항을 비교하면
$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\frac{d_b}{d_a}=\frac{2}{3}$.
2. 일반항의 최고차항도 각각 $d_a n$, $d_b n$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{d_b}{d_a}=\frac{2}{3}$이다.
3. 분자와 분모를 a_n으로 나누면
$\lim_{n\to\infty}\frac{4-3\frac{b_n}{a_n}}{2+3\frac{b_n}{a_n}}=\frac{4-3\cdot\frac{2}{3}}{2+3\cdot\frac{2}{3}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

선지 판단

① X — 계산 결과는 $\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{1}{2}$은 부호가 잘못된 값이다. 올바르게는 $\frac{1}{2}$이다.

② X — 계산 결과는 $\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{1}{4}$은 부호와 크기가 모두 잘못된 값이다. 올바르게는 $\frac{1}{2}$이다.

③ X — 계산 결과는 $\frac{1}{2}$이므로 $\frac{1}{4}$은 분자 2를 반영하지 않은 값이다. 올바르게는 $\frac{1}{2}$이다.

④ O — 계산 결과 $\frac{1}{2}$과 일치한다.

NoteBase

오답 포인트

부분합 S_n, T_n의 지배항은 각각 $\frac{d_a}{2}n^2$, $\frac{d_b}{2}n^2$이다. 첫째항이 아니라 공차가 극한비를 결정한다. 또한 $b_n/a_n \to 2/3$을 대입할 때 분자의 $4 - 3\cdot 2/3 = 2$와 분모의 $2 + 3\cdot 2/3 = 4$를 구분해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

등차수열의 부분합 비가 주어지면 각 부분합의 n^2항 계수를 비교해 공차의 비를 먼저 구한다. 이어 일반항의 일차항 계수비로 바꾸어 목표 식에 대입한다.

암기 포인트

등차수열에서 $S_n \sim \frac{d}{2}n^2$, $a_n \sim dn$이므로 부분합의 극한비와 일반항의 극한비는 모두 공차의 비로 결정된다.

NoteBase

문16. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\lim_{h\to 0}\frac{f(k+\frac{1}{2}h)-f(k-\frac{1}{2}h)}{h}$의 값은?

① 50

② 55

③ 60

④ 65

정답 4번

출제 포인트

대칭차분의 극한이 미분계수와 같다는 원리를 이용하여 각 항을 구한 뒤 합하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x$이다. 각 항은 k를 중심으로 한 대칭차분이며, $k=1$부터 10까지 그 극한값을 합한다.

사용할 공식

미분 가능한 함수에 대하여
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})}{h}=f'(x)$
이다. 두 함수값을 대칭인 두 점에서 빼고 두 점 사이의 간격 h로 나눈 식이므로 미분계수 공식을 사용할 수 있다.

계산 과정

먼저 $f'(x)=x+1$이므로 각 극한값은 $f'(k)=k+1$이다. 따라서
$\sum_{k=1}^{10}(k+1)=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1=55+10=65$
이다.

선지 판단

① X - 계산 결과는 65이므로 50은 틀린 값이다. 올바르게는 식의 값이 65이다.
② X - 55는 $\sum_{k=1}^{10}k$만 계산하여 각 항의 $+1$을 빠뜨린 값이다. 올바르게는 $+1$을 10번 더하여 65이다.
③ X - 계산 결과 65와 일치하지 않으므로 60은 틀린 값이다. 올바르게는 식의 값이 65이다.
④ O - $\sum_{k=1}^{10}(k+1)=65$이므로 옳다.

오답 포인트

극한식을 $f'(k)$로 바꾼 뒤 $f'(k)=k+1$에서 상수항 $+1$을 누락하면 ②의 55를 고르게 된다. 상수 1도 $k=1$부터 10까지 모두 10번 더해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

대칭차분 $\frac{f(x+h/2)-f(x-h/2)}{h}$의 극한을 $f'(x)$로 바꾸고, 도함수에 합의 지표를 대입한 뒤 상수항까지 포함하여 합한다.

암기 포인트

대칭차분의 분모가 두 점 사이의 전체 간격 h이면 극한값은 중심점에서의 미분계수이다.

NoteBase

문 17. 연속함수 $f(x)$가
f(x)=casesx(x-1)&(x>1)\\-x^2-x+a&(x≤ 1)cases(단, a는 상수)
일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$의 값은?

① $\frac{7}{6}$
② $\frac{5}{6}$
③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{6}$

정답 1번

출제 포인트

함수의 연속조건으로 상수 a를 정한 뒤, 주어진 합을 구간 [0, 1]에서의 정적분을 나타내는 리만합으로 바꾸는 문제이다.

조건 정리

연속함수이므로 $x = 1$에서 두 식의 값이 같아야 한다. 또한 $1 \le k \le n$이면 0<(k)/(n)≤1이므로 합에서는 모두 x≤1일 때의 식을 사용한다.

사용할 공식

연속조건은 $\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$이다. 따라서
$1(1-1) = -(1)^2 - 1 + a$
이고, 리만합 공식은
$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n})=\int_0^1 g(x)dx$
이다. 구간을 n등분한 오른쪽 끝점의 함수값에 구간의 폭 $\frac{1}{n}$을 곱해 더한 형태이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. 연속조건에서 $0 = a - 2$이므로 $a = 2$이다.
2. 합에 들어가는 $\frac{k}{n}$은 모두 1 이하이므로 $f(x) = -x^2 - x + 2$를 사용한다.
3. 주어진 극한은 다음 정적분과 같다.
∫ _0^1(-x^2-x+2) dx=≤ft[-(x^3)/(3)-(x^2)/(2)+2x]_0^1=-13-12+2=76

NoteBase

선지 판단

① O — 계산한 극한값이 76이므로 옳다.
② X — 56은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 56 → 올바른 값은 76이다.
③ X — 12은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 12 → 올바른 값은 76이다.
④ X — 16은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 16 → 올바른 값은 76이다.

오답 포인트

연속조건으로 a를 먼저 구하지 않거나, (k)/(n)≤1인데도 $x > 1$인 구간의 식을 적용하면 오답이 된다. 또한 리만합의 계수 1n은 정적분에서 구간의 폭에 해당한다.

다시 나오면 이렇게 판단

조각함수가 연속이라고 주어지면 경계점에서 양쪽 식을 연결해 상수를 먼저 정한다. 그다음 합에 대입되는 값의 범위를 확인하여 사용할 식을 고르고, 1n Σ g((k)/(n)) 꼴을 $\int_0^1 g(x)dx$로 바꾼다.

암기 포인트

연속조건으로 상수를 결정하고, 1n Σ _k=1^ng((k)/(n))는 $\int_0^1 g(x)dx$로 연결한다.

NoteBase

문 18. 방정식 $x^2 + 2y + 4z = 6$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

출제 포인트

음이 아닌 정수 조건에서 제곱항의 가능한 값을 먼저 제한한 뒤, 각 경우의 일차방정식 해를 세는 문제이다.

조건 정리

x, y, z는 모두 음이 아닌 정수이다. $x^2 \le 6$이므로 x는 0, 1, 2만 가능하다. 또한 $2y + 4z$는 짝수이므로 $6 - x^2$도 짝수여야 한다.

사용할 원리

x의 가능한 값을 하나씩 대입하여 $y + 2z$의 음이 아닌 정수해를 센다. 제곱항 때문에 x의 범위가 유한하고, 고정된 x마다 z를 정하면 y가 결정되므로 이 방법을 사용한다.

계산 과정

1. $x = 0$이면 $y + 2z = 3$이다. $(y, z) = (3, 0), (1, 1)$이므로 2개이다.
2. $x = 1$이면 $2y + 4z = 5$이다. 왼쪽은 짝수인데 오른쪽은 홀수이므로 해가 없다.
3. $x = 2$이면 $y + 2z = 1$이다. $(y, z) = (1, 0)$만 가능하므로 1개이다.

따라서 전체 해는 $(x, y, z) = (0, 3, 0), (0, 1, 1), (2, 1, 0)$의 3개이다.

선지 판단

① X — 해의 개수를 1개로 본 것은 $x = 2$인 경우만 센 결과이다. 올바르게는 전체 경우를 합하여 3개이다.
② X — 해의 개수를 2개로 본 것은 $x = 0$인 경우만 센 결과이다. 올바르게는 $x = 2$인 경우의 해 1개도 더하여 3개이다.
③ O — 가능한 해를 모두 세면 3개이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — 해의 개수를 4개로 보는 것은 $x = 1$인 경우에도 해가 있다고 잘못 센 결과이다. 올바르게는 $x = 1$일 때 짝수와 홀수가 같아질 수 없어 해가 없으므로 전체 3개이다.

NoteBase

오답 포인트

$x = 1$을 대입한 뒤 정수해를 억지로 세거나, $x = 0$ 또는 $x = 2$ 중 한 경우만 세면 오답이 된다. $2y + 4z$가 항상 짝수라는 점을 이용하면 $x = 1$인 경우를 즉시 제외할 수 있다.

다시 나오면 이렇게 판단

제곱항이 있는 음이 아닌 정수해 개수 문제에서는 먼저 제곱항의 범위를 제한하고, 홀짝 조건으로 불가능한 경우를 제거한 뒤, 남은 각 경우의 해를 빠짐없이 합산한다.

암기 포인트

제곱항은 범위로 제한하고, 짝수 계수식은 홀짝으로 거른다.

NoteBase

문 19. 닫힌구간 $[2, 3]$에서 정의된 연속확률변수 X에 대하여
$P(2 \le X \le t) = \frac{1}{9}t^3 + \frac{a}{3}t^2$
라 할 때, 평균 $E(X)$의 값은? (단, $2 \le t \le 3$이고 a는 상수이다.)

① $\frac{5}{4} - \frac{4}{27}$
② $\frac{7}{4} - \frac{4}{27}$
③ $\frac{9}{4} - \frac{4}{27}$
④ $\frac{11}{4} - \frac{4}{27}$

정답 4번

출제 포인트

누적분포함수의 끝점 조건으로 상수 a를 정한 뒤, 이를 미분해 확률밀도함수를 구하고 평균 $E(X)$를 계산하는 문제이다.

조건 정리

$F(t) = P(2 \le X \le t) = \frac{1}{9}t^3 + \frac{a}{3}t^2$이다.
X가 [2, 3]에서 값을 가지므로 F(3)=P(2≤ X≤3)=1이다.
연속확률변수이므로 확률밀도함수는 $f(t) = F'(t)$이고, 평균은 $E(X) = \int_2^3 tf(t)dt$이다.

사용할 공식

$F(3) = 1, \qquad f(t) = F'(t), \qquad E(X) = \int_2^3 tf(t)dt$
주어진 식은 누적확률을 나타내므로 먼저 전체 구간의 누적확률이 1이라는 조건을 적용하고, 그다음 미분하여 확률밀도함수로 바꾸어야 한다.

계산 과정

1. 끝점 조건을 적용하면
$F(3) = \frac{1}{9} \cdot 3^3 + \frac{a}{3} \cdot 3^2 = 3 + 3a = 1$
이므로 $a = -\frac{2}{3}$이다.
2. 누적분포함수를 미분하면
$f(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{2a}{3}t = \frac{t^2}{3} - \frac{4t}{9}$
이다.
3. 평균을 계산하면
alignedE(X)&= ∫ _2^3 t≤ft((t^2)/(3)-(4t)/(9))dt\\&=≤ft[(t^4)/(12)-(4t^3)/(27)]_2^3\\&=≤ft((11)/(4))-≤ft((4)/(27))=(11)/(4)-(4)/(27).aligned

NoteBase

선지 판단

① X — $\frac{5}{4} - \frac{4}{27}$은 계산값과 다르다. 틀린 표현 $\frac{5}{4}$는 올바르게는 상한 $t = 3$을 대입해 얻는 $\frac{11}{4}$이다.
② X — $\frac{7}{4} - \frac{4}{27}$은 계산값과 다르다. 틀린 표현 $\frac{7}{4}$는 올바르게는 $\frac{11}{4}$이다.
③ X — $\frac{9}{4} - \frac{4}{27}$은 계산값과 다르다. 틀린 표현 $\frac{9}{4}$는 올바르게는 $\frac{11}{4}$이다.
④ O — 평균의 정확한 계산값이 $\frac{11}{4} - \frac{4}{27}$이므로 옳다.

오답 포인트

주어진 $P(2 \le X \le t)$를 확률밀도함수로 바로 적분하면 안 된다. 이는 누적분포함수이므로 먼저 $F(3) = 1$에서 a를 구하고, 미분한 $f(t)$에 t를 곱해 평균을 계산해야 한다. 또한 정적분의 하한값 $\frac{4}{27}$을 빼는 것을 빠뜨리기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

구간 누적확률이 식으로 주어지면 먼저 오른쪽 끝점에서 값이 1인지 이용해 미정계수를 정하고, 누적분포함수를 미분한 뒤 $E(X) = \int x f(x) dx$를 적용한다.

암기 포인트

누적분포함수는 끝점에서 1, 밀도함수는 누적분포함수의 미분, 평균은 $xf(x)$의 적분이다.

NoteBase

문 20. 어떤 약의 질병 A에 대한 치료율이 0.9라고 한다. 이 약을 질병 A 환자 1000명에게 투여했을 때, 치료되는 환자의 수가 919명 이상일 확률은? (단, 치료 유무는 약 투여에 의해서만 결정되고 $3\sqrt{10} = 9.5$라고 하자.)

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.34
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 0.16

② 0.07

③ 0.02

④ 0.01

정답 3번

출제 포인트

치료 환자 수를 이항분포로 나타낸 뒤 정규분포로 근사하여 특정 값 이상일 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

한 환자가 치료될 확률은 $p = 0.9$이고 투여 인원은 $n = 1000$이다. 치료되는 환자 수를 X라 하면 $X \sim B(1000, 0.9)$이다. 구해야 할 값은 $P(X \geq 919)$이다.

NoteBase

사용할 공식

이항분포 $B(n, p)$는 n이 충분히 클 때 평균 np, 분산 $np(1-p)$인 정규분포로 근사한다. 따라서 표준화 변수는 $Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$이다. 이 문제에서는 $np = 900$, $np(1-p) = 90$으로 두 값이 충분히 크므로 정규근사를 사용할 수 있다.

계산 과정

평균과 표준편차는 각각

$\mu = np = 1000 \times 0.9 = 900, \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} = 9.5$

이다. 따라서

$P(X \geq 919) \approx P\left(Z \geq \frac{919 - 900}{9.5}\right) = P(Z \geq 2)$

이다. 표에서 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$이므로

$P(Z \geq 2) = 0.5 - 0.48 = 0.02$

이다.

선지 판단

① X — 0.16은 $P(Z \geq 1) = 0.5 - 0.34$에 해당한다. 이 문항의 표준화값은 1이 아니라 2이므로 틀리며, 올바른 확률은 0.02이다.

② X — 0.07은 $P(Z \geq 1.5) = 0.5 - 0.43$에 해당한다. 이 문항의 표준화값은 1.5가 아니라 2이므로 틀리며, 올바른 확률은 0.02이다.

③ O — 표준화하면 $Z \geq 2$이고, 오른쪽 꼬리확률은 $0.5 - 0.48 = 0.02$이다.

④ X — 0.01은 $P(Z \geq 2.5) = 0.5 - 0.49$에 해당한다. 이 문항의 표준화값은 2.5가 아니라 2이므로 틀리며, 올바른 확률은 0.02이다.

오답 포인트

표의 값은 누적확률 $P(Z \leq z)$가 아니라 평균 0부터 z까지의 확률 $P(0 \leq Z \leq z)$이다. 따라서 '919명 이상'의 오른쪽 꼬리확률은 표의 0.48을 그대로 쓰지 않고 $0.5 - 0.48$로 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

성공 횟수 문제에서는 먼저 $X \sim B(n, p)$로 놓고 평균 np와 표준편차 $\sqrt{np(1-p)}$를 구한다. 기준값을 표준화한 뒤, 표가 나타내는 확률의 구간과 문제에서 요구한 꼬리 방향을 대조한다.

암기 포인트

이항분포의 정규근사에서는 평균이 np, 표준편차가 $\sqrt{np(1-p)}$이며, 오른쪽 꼬리확률은 $0.5 - P(0 \leq Z \leq z)$이다.

NoteBase