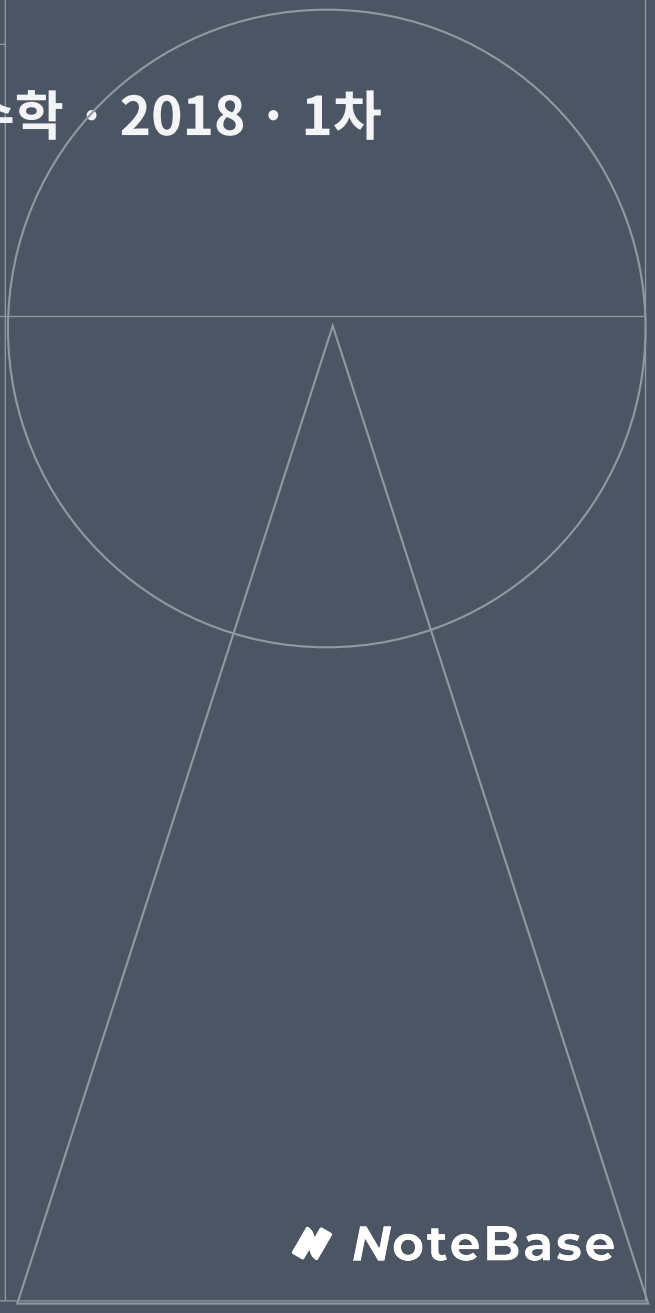
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 1차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 1차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2018 · 1차

문 1. 다항식 $x^3 - ax^2 + bx - 6$을 인수분해하면 $(x-1)(x-2)(x+c)$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$의 값은?

① 20

② 18

③ 16

④ 14

정답 4번

출제 포인트

인수분해된 식의 상수항을 비교해 c를 구하고, 식을 전개하여 각 항의 계수에서 a와 b를 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 등식은 $x^3 - ax^2 + bx - 6 = (x-1)(x-2)(x+c)$이다. 양변의 같은 차수 항의 계수와 상수항은 각각 같아야 하며, 구해야 할 값은 $a+b+c$이다.

사용할 원리

두 다항식이 모든 x에 대하여 같으면 동류항의 계수가 각각 같다. 특히 우변의 상수항은 $(-1)(-2)c = 2c$이므로 $2c = -6$으로 놓을 수 있다.

계산 과정

1. 상수항을 비교하면 $2c = -6$이므로 $c = -3$이다.
2. 우변에 $c = -3$을 대입하여 전개하면
$(x-1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 3x + 2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
이다.
3. $x^3 - ax^2 + bx - 6$과 계수를 비교하면 $-a = -6$이므로 $a = 6$, $b = 11$이다.
4. 따라서 $a + b + c = 6 + 11 - 3 = 14$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 20은 계산 결과 14와 다르다. ①의 '20'은 '14'로 고쳐야 한다.
② X — 18은 계산 결과 14와 다르다. ②의 '18'은 '14'로 고쳐야 한다.
③ X — 16은 계산 결과 14와 다르다. ③의 '16'은 '14'로 고쳐야 한다.
④ O — 14는 $a=6$, $b=11$, $c=-3$을 더한 값과 일치한다.

오답 포인트

$-ax^2$의 계수는 $-a$이므로 전개식의 x^2의 계수 -6과 비교할 때 $-a=-6$, 즉 $a=6$이다. 또한 인수 $x+c$가 $x-3$이므로 $c=3$이 아니라 $c=-3$이다. 이 두 부호를 잘못 처리하면 합이 달라진다.

다시 나오면 이렇게 판단

인수분해식의 상수항을 먼저 비교해 미지수를 정한 뒤 식을 전개하고, 원래 다항식과 동류항의 계수를 비교한다. 계수 앞에 붙은 음수 부호까지 포함해 대응시키고 마지막에 구한 값을 원래 식에 대입해 검산한다.

암기 포인트

다항식의 항등식은 같은 차수의 계수끼리 비교하며, $-ax^2$의 x^2 계수는 $-a$이다.

NoteBase

문 2. $z=\frac{1}{i+1}$**일 때** $2z^2-2z+5$**의 값은? (단,** $i=\sqrt{-1}$**)**

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 1번

출제 포인트

복소수의 분모를 실수화한 뒤 식에 대입하여 값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $z=\frac{1}{1+i}$이고, 구해야 할 값은 $2z^2-2z+5$이다. $i^2=-1$을 이용하며, 분모와 그 켤레복소수를 곱해 z를 간단히 한다.

사용할 공식

복소수의 분모를 실수화할 때 분모와 분자에 분모의 켤레복소수를 곱한다. 따라서 $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$이다. 이 방법을 쓰면 분모가 $1-i^2=2$가 되어 z를 실수부와 허수부의 형태로 나타낼 수 있다.

계산 과정

$z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{2}$
그러므로
$z^2=\left(\frac{1-i}{2}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{4}=-\frac{i}{2}$
이고,
$2z^2-2z+5=-i-(1-i)+5=4$
이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 4이므로 옳다.
② X — 계산 결과는 5가 아니라 4이다. $2z^2-2z$를 빠뜨리고 상수항만 취하면 5로 잘못 판단할 수 있다.
③ X — 계산 결과는 6이 아니라 4이다. $i^2=-1$을 적용한 전체 식의 값은 4이다.
④ X — 계산 결과는 7이 아니라 4이다. 분모를 실수화하고 각 항의 부호를 정확히 반영하면 7이 나오지 않는다.

NoteBase

오답 포인트

핵심 함정은 i^2을 1로 처리하거나 $-2z$의 음수를 누락하는 것이다. $z=\frac{1-i}{2}$에서 $z^2=-\frac{i}{2}$가 되며, 허수항 $-i$와 $+i$가 상쇄된다는 점을 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

복소수의 분모를 먼저 켤레복소수로 실수화하고, $i^2=-1$을 적용해 거듭제곱을 계산한 뒤 실수부와 허수부를 각각 정리한다.

암기 포인트

분모 실수화에는 켤레복소수를 곱하며, $i^2=-1$이다.

NoteBase

문 3. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$일 때, $\sqrt{(b-a)^2} - 2\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$을 간단히 하면?

① $a + 2b$

② $-a - 2b$

③ $a - 2b$

④ $-a + 2b$

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 복소수 범위에서 제곱근의 부호 관계로 a, b의 부호를 정한 뒤, $\sqrt{x^2} = |x|$를 이용해 식을 간단히 하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: a, b는 0이 아닌 실수이고 (a)/(b)=-√(ab)이다.
조건에서 얻는 부호: $a > 0$, $b < 0$이다. 실제로 이때 b=i√(-b)이므로
(a)/(b)=(a)/(i√(-b))=-i(a)/(-b)=-√(ab)
가 성립한다. 다른 부호 조합에서는 두 변의 부호 또는 허수부의 부호가 서로 맞지 않는다. 따라서 $b - a < 0$도 성립한다.

사용할 공식

실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2} = |x|$이다. 따라서 각 제곱근을 없앨 때 밑의 식이나 수의 부호를 먼저 확인해야 한다.

계산 과정

$a > 0, b < 0, b - a < 0$이므로

$\sqrt{(b-a)^2} = |b-a| = a - b, \qquad \sqrt{a^2} = |a| = a, \qquad \sqrt{b^2} = |b| = -b.$

따라서

$(a - b) - 2a + (-b) = -a - 2b.$

선지 판단

① X — $a + 2b$는 계산 결과와 두 항의 부호가 모두 다르다. 올바르게는 $-a - 2b$이다.

② O — 계산 결과가 정확히 $-a - 2b$이다.

③ X — $a - 2b$는 a항의 부호가 잘못되었다. 올바르게는 $-a - 2b$이다.

④ X — $-a + 2b$는 b항의 부호가 잘못되었다. 올바르게는 $-a - 2b$이다.

NoteBase

오답 포인트

$\sqrt{x^2}$를 곧바로 x로 바꾸는 것이 함정이다. 이 문항에서는 $b<0, b-a<0$이므로 $\sqrt{b^2}=-b$, $\sqrt{(b-a)^2}=a-b$가 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

제곱근의 곱셈·나눗셈 관계가 주어지면 먼저 각 수의 부호를 정하고, $\sqrt{x^2}=|x|$로 바꾼 다음 절댓값 안의 식의 부호에 따라 절댓값을 제거한다.

암기 포인트

$\sqrt{x^2}=|x|$이며, 음수 x에 대해서는 $|x|=-x$이다.

NoteBase

문 4. x에 대한 이차방정식 $x^2+(a+1)x+2=0$의 한 근이 다른 근의 2배일 때 실수 a의 값은? (단, $a<0$)

① -8

② -6

③ -4

④ -2

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 두 근의 비가 주어졌을 때 근과 계수의 관계를 이용하여 계수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

두 근 중 작은 배수의 근을 t, 다른 근을 $2t$로 둔다. 두 근의 곱은 2이고, 두 근의 합은 $-(a+1)$이다. 또한 $a<0$인 해만 선택한다.

사용할 공식

이차방정식 $x^2+Bx+C=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계는 $\alpha+\beta=-B$, $\alpha\beta=C$이다. 이 문제에서는 두 근의 비와 곱이 주어지므로 이 관계로 각 근과 a를 결정할 수 있다.

계산 과정

두 근을 t, $2t$로 두면 곱의 관계에서

$t\cdot 2t=2$

이므로 $2t^2=2$, 즉 $t=1$ 또는 $t=-1$이다.

두 근의 합은 $3t$이므로

$3t=-(a+1)$

이다. 따라서 $t=1$이면 $a=-4$이고, $t=-1$이면 $a=2$이다. 조건 $a<0$을 만족하는 값은 $a=-4$이다.

선지 판단

① X — -8은 근과 계수의 관계 및 $a<0$ 조건으로 얻어지는 값이 아니다. 틀린 값 -8 → 올바른 값은 -4이다.

② X — -6은 두 근을 t, $2t$로 두고 곱과 합을 계산한 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 -6 → 올바른 값은 -4이다.

③ O — $t=1$일 때 $3=-(a+1)$이므로 $a=-4$이고, $a<0$도 만족한다.

④ X — -2는 $3=-(a+1)$을 푼 값이 아니다. 틀린 값 -2 → 올바른 값은 -4이다.

NoteBase

오답 포인트

곱의 관계에서 $t = \pm 1$이 모두 나오므로 한 경우만 보고 끝내면 안 된다. 두 경우로부터 $a = -4, 2$를 각각 구한 뒤 $a < 0$ 조건으로 -4만 남겨야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

한 근이 다른 근의 일정한 배수이면 두 근을 t, kt로 둔다. 곱의 관계로 t를 구하고, 합의 관계로 계수를 구한 다음 부호나 범위 조건으로 최종 해를 거른다.

암기 포인트

두 근이 $t, 2t$이면 합은 $3t$, 곱은 $2t^2$이다.

NoteBase

문 5. x**에 대한 삼차방정식** $x^3+(3-a)x^2+ax-4=0$**이 중근을 갖도록 하는 모든 실수** a**의 값의 합은?**

① 17

② 9

③ 8

④ 1

정답 1번

출제 포인트

항상 성립하는 근을 이용해 삼차식을 인수분해한 뒤, 두 인수의 공통근 또는 이차인수의 중근 조건으로 삼차방정식의 중근을 찾는 문제이다.

조건 정리

주어진 방정식은 $x^3+(3-a)x^2+ax-4=0$이다. 구해야 할 값은 이 방정식이 중근을 갖게 하는 모든 실수 a의 합이다. $x=1$을 대입하면 모든 a에 대하여 식의 값이 0이므로 $x-1$이 항상 인수이다.

사용할 공식

인수분해하면 $x^3+(3-a)x^2+ax-4=(x-1)\{x^2+(4-a)x+4\}$. 삼차식이 중근을 가지는 경우는 두 인수가 공통근 $x=1$을 갖거나, 이차인수 자체가 중근을 갖는 경우이다. 이차방정식 $Ax^2+Bx+C=0$의 중근 조건은 판별식 $D=B^2-4AC=0$이다.

계산 과정

1. 두 인수가 공통근 $x=1$을 가지려면 $1+(4-a)+4=0$이므로 $a=9$이다.
2. 이차인수 $x^2+(4-a)x+4$가 중근을 가지려면 $D=(4-a)^2-16=0$이다. 따라서 $4-a=\pm4$이므로 $a=0, 8$이다.
3. 가능한 모든 값은 0,8,9이고, 그 합은 $0+8+9=17$이다.

선지 판단

① O — 가능한 a의 값 0,8,9를 모두 더하면 17이므로 옳다.
② X — 9는 두 인수가 공통근 $x=1$을 갖게 하는 하나의 값일 뿐이다. 모든 값의 합으로 고치면 17이다.
③ X — 8은 이차인수의 판별식을 0으로 만드는 하나의 값일 뿐이다. 모든 값의 합으로 고치면 17이다.
④ X — 1은 중근 조건을 만족하는 a의 값도 아니고 모든 값의 합도 아니다. 올바른 합은 17이다.

NoteBase

오답 포인트

판별식만 계산하면 $a = 0$, 8만 얻고, 서로 다른 두 인수가 공통근 $x = 1$을 갖는 $a = 9$를 빠뜨리기 쉽다. 반대로 $a = 9$ 또는 $a = 8$ 하나를 찾은 뒤 문제의 '모든 실수 a의 값의 합'이라는 조건을 놓치면 ②나 ③을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

매개변수가 있는 다항방정식의 중근 문제에서는 먼저 항상 성립하는 근을 찾아 인수분해한다. 그다음 인수끼리 공통근을 갖는 경우와 각 인수 자체가 중근을 갖는 경우를 모두 조사하고, 구한 매개변수의 중복 여부를 확인해 합한다.

암기 포인트

곱으로 인수분해된 다항식의 중근은 '한 인수의 중근'뿐 아니라 '서로 다른 인수의 공통근'에서도 생긴다.

NoteBase

문 6. 이차함수 $y = x^2 - 2(a - 2k)x + a^2 - 2k + 4k^2$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 항상 x축에 접할 때, 실수 $2a$의 값은?

① -1

② 1

③ -3

④ 3

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 이차함수의 그래프가 x축에 접할 조건인 판별식 $\Delta = 0$을 이용하고, 그 조건이 모든 실수 k에 대하여 성립하도록 a를 정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 x에 대한 이차함수이다.
그래프가 x축에 접하려면 x에 대한 이차방정식 $y = 0$이 중근을 가져야 한다.
접하는 조건은 특정한 k에서만이 아니라 모든 실수 k에서 성립해야 한다.

사용할 공식

이차방정식 $Ax^2 + Bx + C = 0$의 판별식은 $\Delta = B^2 - 4AC$이며, 중근을 가질 조건은 $\Delta = 0$이다.
이 문제의 그래프가 x축에 접한다는 것은 $y = 0$의 두 실근이 하나로 일치한다는 뜻이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

계수는 $A = 1, B = -2(a - 2k), C = a^2 - 2k + 4k^2$이다.
따라서
aligned\Delta&=\-2(a-2k)\^2-4(a^2-2k+4k^2)\\&=4≤ft[(a-2k)^2-(a^2-2k+4k^2)]\\&=4k(2-4a)aligned
이 식이 모든 실수 k에서 0이어야 하므로 k의 계수인 $2 - 4a$가 0이다.
2-4a=0, a=12, 2a=1

NoteBase

선지 판단

① X

- $2a = -1$은 계산 결과와 다르다. 틀린 값은 -1이며, 올바른 값은 $2a = 1$이다.

② O

- 모든 실수 k에서 $\Delta = 4k(2 - 4a) = 0$이 되게 하면 a=12이므로 $2a = 1$이다.

③ X

- $2a = -3$은 $2 - 4a = 0$을 만족하지 않는다. 틀린 값은 -3이며, 올바른 값은 $2a = 1$이다.

④ X

- $2a = 3$은 $2 - 4a = 0$을 만족하지 않는다. 틀린 값은 3이며, 올바른 값은 $2a = 1$이다.

오답 포인트

$k = 0$만 대입하면 판별식이 a와 관계없이 0이 되어 조건을 정할 수 없다. 핵심은 '모든 실수 k'이므로 $\Delta = 4k(2 - 4a)$가 항등적으로 0이 되도록 k의 계수 $2 - 4a$를 0으로 두는 데 있다. 또한 구한 a=12을 그대로 고르지 않고 문제에서 요구한 $2a$로 바꾸어야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

이차함수의 접선 조건에서는 먼저 판별식을 0으로 둔다. 이어 '모든 매개변수의 값에서' 성립한다는 조건이 있으면 판별식을 매개변수에 관한 항등식으로 보고 각 계수가 0이 되는지 확인한다. 마지막에는 구한 문자값과 문제에서 요구한 값을 구분한다.

암기 포인트

x축에 접함은 $\Delta = 0$, 모든 k에서 성립함은 k에 관한 항등식이다.

NoteBase

문 7. 이차함수 $y = x^2 + px + 4$의 그래프와 직선 $y = -3x + q$가 서로 다른 두 점에서 만나고 두 교점의 x 좌표가 각각 $-1, 2$일 때 $p^2 - q^2$의 값은? (단, p, q는 실수)

① -10

② 10

③ -20

④ 20

정답 3번

출제 포인트

두 그래프의 교점에서 두 식의 함수값이 같다는 점과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용해 p, q를 구하는 문제이다.

조건 정리

두 그래프의 교점에서는 $x^2 + px + 4 = -3x + q$가 성립한다. 이를 정리한 이차방정식
$x^2 + (p + 3)x + (4 - q) = 0$의 서로 다른 두 근은 $-1, 2$이다. 구해야 할 값은 $p^2 - q^2$이다.

사용할 공식

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$이다. 교점의 x좌표가 교점 방정식의 두 근이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

두 근의 합에서
$-1 + 2 = 1 = -(p + 3)$
이므로 $p = -4$이다.

두 근의 곱에서
$(-1) \times 2 = -2 = 4 - q$
이므로 $q = 6$이다. 따라서
$p^2 - q^2 = (-4)^2 - 6^2 = 16 - 36 = -20$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — -10은 $p-q=-4-6$을 계산한 값이다. 문제에서 요구한 것은 $p-q$가 아니라 p^2-q^2이므로, 올바르게는 -20이다.
② X — 10은 $q-p=6-(-4)$를 계산한 값이다. 식과 제곱을 모두 잘못 바꾼 값이며, 올바르게는 $p^2-q^2=-20$이다.
③ O — $p=-4, q=6$을 대입하면 $p^2-q^2=16-36=-20$이므로 옳다.
④ X — 20은 q^2-p^2처럼 뺄셈의 순서를 바꾸면 나오는 값이다. 올바르게는 $p^2-q^2=-20$이다.

오답 포인트

교점의 x좌표를 구하는 대신 이미 주어진 $-1, 2$를 교점 방정식의 두 근으로 이용해야 한다. 또한 $p-q$와 p^2-q^2, p^2-q^2와 q^2-p^2를 혼동하면 각각 ①·② 또는 ④를 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 그래프의 교점 좌표가 주어지면 먼저 두 함수식을 같게 놓아 교점 방정식을 만든다. 주어진 x좌표를 그 방정식의 근으로 보고 근의 합과 곱을 계수와 연결한 뒤, 마지막에 문제에서 요구한 식의 순서와 제곱 여부를 확인한다.

암기 포인트

교점의 x좌표는 두 함수식을 같게 놓아 만든 방정식의 근이다. 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$, 곱은 $\frac{c}{a}$이다.

NoteBase

문 8. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-1<x<2$일 때, 이차부등식 $cx^2-ax-b<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이다. 이때 $\alpha+\beta$의 값은?

① -2
② $-\frac{3}{2}$
③ -1
④ $-\frac{1}{2}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 이차부등식의 해 구간에서 이차식의 두 근과 최고차항 계수의 부호를 파악한 뒤, 계수 사이의 관계를 다른 이차부등식에 대입하여 두 근의 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 이차식의 두 근은 $-1, 2$이다. 또한 $ax^2+bx+c>0$의 해가 두 근 사이이므로 포물선은 아래로 열리고 $a<0$이다.
구해야 할 값은 $cx^2-ax-b<0$의 두 경계값 α, β의 합 $\alpha+\beta$이다.

사용할 공식

두 근이 $-1, 2$인 이차식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$ax^2+bx+c=a(x+1)(x-2)$
이 식을 전개하여 b, c를 a로 나타낸 뒤 새 부등식에 대입한다. 이 방법을 쓰는 이유는 해 구간의 양 끝값이 원래 이차식의 두 근이기 때문이다.

NoteBase

계산 과정

먼저 원래 이차식을 전개한다.

$a(x+1)(x-2) = a(x^2 - x - 2) = ax^2 - ax - 2a$

따라서 $b = -a$, $c = -2a$이다. 이를 새 이차식에 대입하면

$cx^2 - ax - b = -2ax^2 - ax + a = -a(2x^2 + x - 1) = -a(2x-1)(x+1)$

이다. $a < 0$이므로 $-a > 0$이다. 따라서

$-a(2x-1)(x+1) < 0$

의 해는 두 근 $-1, \frac{1}{2}$ 사이인

$-1 < x < \frac{1}{2}$

이다. 그러므로 $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$이고,

$\alpha + \beta = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

이다.

선지 판단

① X — -2는 원래 이차식의 두 근 $-1, 2$의 곱이다. 구해야 하는 것은 새 부등식의 두 경계값의 합이며, 올바른 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

② X — $-\frac{3}{2}$는 $\alpha - \beta = -1 - \frac{1}{2}$로 계산할 때 나오는 값이다. 문제는 $\alpha + \beta$를 묻고 있으므로 올바른 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

③ X — -1은 새 부등식의 왼쪽 경계값 α 하나만 나타낸다. $\beta = \frac{1}{2}$까지 더해야 하므로 올바른 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

④ O — 새 부등식의 해는 $-1 < x < \frac{1}{2}$이므로 $\alpha + \beta = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$이다.

오답 포인트

원래 부등식의 두 근을 구한 뒤 그 합이나 곱을 바로 답으로 고르면 안 된다. 특히 ①은 원래 두 근의 곱, ②는 새 경계값의 차, ③은 새 경계값 하나만 사용한 값이다. 새 이차식으로 바꾸어 근을 다시 구하고, 문제에서 요구한 연산이 합인지 차인지 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

이차부등식의 해 구간이 주어지면 구간의 양 끝을 근으로 두어 이차식을 인수분해형으로 나타낸다. 해가 두 근 사이인지 바깥쪽인지로 최고차항 계수의 부호를 확인한 다음, 계수 관계를 목표 식에 대입하고 새 부등식의 근을 구한다.

암기 포인트

이차식의 두 근이 r_1, r_2이면 $a(x-r_1)(x-r_2)$로 나타낸다. 두 근 사이에서 이차식이 양수이면 최고차항 계수는 음수이다.

NoteBase

문 9. 원 $(x-1)^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동 하였더니 직선 $3x+4y=5$에 접했을 때, 모든 상수 a의 값의 합은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 3번

출제 포인트

원을 평행이동한 뒤의 중심을 구하고, 원이 직선에 접할 때 중심과 직선 사이의 거리가 반지름과 같다는 성질을 이용해 모든 a의 값의 합을 구하는 문제이다.

조건 정리

원 $(x-1)^2+y^2=1$의 중심은 $(1,0)$, 반지름은 1이다. 이를 x축 방향으로 a, y축 방향으로 -1만큼 평행이동하면 중심은 $(1+a,\ -1)$이 되고 반지름은 그대로 1이다.

사용할 공식

점 (x_0, y_0)과 직선 $Ax+By+C=0$ 사이의 거리는

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

이다. 평행이동한 원이 직선에 접하므로 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름 1과 같다.

NoteBase

계산 과정

직선 $3x+4y=5$를 $3x+4y-5=0$으로 나타내고 중심 $(1+a,\ -1)$을 거리 공식에 대입한다.

$$\frac{|3(1+a)+4(-1)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

$$\frac{|3a-6|}{5}=1 \quad\Longrightarrow\quad |3a-6|=5$$

따라서 $3a-6=5$ 또는 $3a-6=-5$이므로 $a=\frac{11}{3}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$이다. 모든 a의 값의 합은

$$\frac{11}{3}+\frac{1}{3}=4$$

이다.

선지 판단

① X — 모든 a의 값의 합은 2가 아니라 4이다. 틀린 값 2 → 올바르게는 4이다.
② X — 모든 a의 값의 합은 3이 아니라 4이다. 틀린 값 3 → 올바르게는 4이다.
③ O — 두 해 $\frac{11}{3}$, $\frac{1}{3}$의 합이 4이므로 옳다.
④ X — 모든 a의 값의 합은 5가 아니라 4이다. 틀린 값 5 → 올바르게는 4이다.

오답 포인트

접한다는 조건을 중심이 직선 위에 있다는 뜻으로 해석하면 안 된다. 접할 때 중심과 직선 사이의 거리는 0이 아니라 반지름 1이다. 또한 절댓값 방정식 $|3a-6|=5$에서는 두 경우를 모두 풀어야 하며, 한 해만 구하면 '모든 상수 a의 값의 합'을 정확히 계산할 수 없다.

다시 나오면 이렇게 판단

원의 평행이동 문제는 '이동한 중심 확인 → 반지름 유지 확인 → 중심과 직선 사이의 거리 = 반지름 → 절댓값의 두 경우 계산'의 순서로 판단한다.

암기 포인트

원과 직선이 접하면 중심에서 직선까지의 거리는 반지름과 같다.

NoteBase

문 10. x, y**가 세 부등식** $y \le x+3, y \le -4x+3, y \ge 0$**을 만족할 때,** $x+y$**의 최댓값을** M**, 최솟값을** m**이라 하면** $M-m$**의 값은?**

① 4

② 6

③ 8

④ 10

정답 2번

출제 포인트

세 부등식이 나타내는 공통 영역의 꼭짓점을 구한 뒤, 각 꼭짓점에서 일차식 $x+y$의 값을 비교하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $y \le x+3, y \le -4x+3, y \ge 0$이다.
구해야 할 값은 공통 영역에서 $x+y$의 최댓값 M과 최솟값 m의 차 $M-m$이다.
공통 영역은 세 경계선으로 둘러싸인 삼각형이므로 꼭짓점을 빠짐없이 확인해야 한다.

사용할 공식

일차식의 최댓값과 최솟값은 닫힌 다각형 영역의 꼭짓점에서 얻어진다.
두 직선의 교점은 $x+3=-4x+3$에서 구하고, 나머지 꼭짓점은 각 직선과 $y=0$의 교점에서 구한다.
목적함수 $x+y$가 일차식이고 공통 영역이 닫힌 삼각형이므로 이 원리를 사용한다.

계산 과정

1. $y=x+3$과 $y=0$의 교점은 $(-3, 0)$이다.
2. $y=-4x+3$과 $y=0$의 교점은 $(\frac{3}{4}, 0)$이다.
3. $x+3=-4x+3$에서 $5x=0$이므로 두 직선의 교점은 $(0, 3)$이다.
4. 세 꼭짓점에서 $x+y$의 값은 각각 $-3, \frac{3}{4}, 3$이다. 따라서 $M=3, m=-3$이고, $M-m=3-(-3)=6$이다.

NoteBase

선지 판단

① X

4는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $M-m=6$이다.

② O

최댓값 $M=3$, 최솟값 $m=-3$이므로 $M-m=6$이다.

③ X

8은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $M-m=6$이다.

④ X

10은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 $M-m=6$이다.

오답 포인트

최솟값 $m=-3$을 차에 대입할 때 $M-m=3-(-3)$으로 계산해야 한다. 또한 두 직선의 교점만 확인하지 않고, 각 직선과 x축이 만나는 두 꼭짓점도 함께 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

연립부등식의 공통 영역을 정한 뒤 경계선끼리의 교점으로 모든 꼭짓점을 구하고, 각 꼭짓점에 목적함수를 대입하여 최댓값과 최솟값을 비교한다.

암기 포인트

닫힌 다각형에서 일차식의 최댓값과 최솟값은 꼭짓점에서 확인한다.

NoteBase

문 11. x에 대한 다항함수 $f(x)$가 두 조건 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+x+2}=2$, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=-1$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 3

② 2

③ 1

④ 0

정답 4번

출제 포인트

무한대에서의 극한으로 다항함수의 차수와 최고차항의 계수를 정하고, $x=1$에서의 극한으로 나머지 계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

첫 번째 극한에서 분모는 이차식이고 극한값이 0이 아닌 유한한 값 2이므로, $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. 따라서 $f(x)=2x^2+ax+b$로 둔다.
두 번째 극한이 유한하려면 분모가 0이 되는 $x=1$에서 분자도 0이어야 하므로 $f(1)=0$이다.

사용할 공식

$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+\cdots}{b_n x^n+\cdots}=\frac{a_n}{b_n}$이고, $f(1)=0$이면 $f(x)=(x-1)g(x)$로 인수분해할 수 있다.
첫 번째 공식은 같은 차수인 두 다항식의 무한대 극한이 최고차항 계수의 비로 결정되기 때문에 사용한다. 두 번째 성질은 $x^2-1=(x-1)(x+1)$에서 공통인수 $x-1$을 약분해 두 번째 극한을 계산하기 위해 사용한다.

계산 과정

$f(x)=2x^2+ax+b$로 둔다. $f(1)=0$에서 $2+a+b=0$이다.
또한 $f(x)=(x-1)(2x+c)$로 쓸 수 있다. 그러면
$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+c)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2+c}{2}=-1$
이므로 $c=-4$이다. 따라서
$f(x)=(x-1)(2x-4)=2x^2-6x+4$
이고,
$f(2)=8-12+4=0$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 선지의 값 3은 계산값 $f(2) = 0$과 다르다. 올바른 값은 0이다.
② X — 선지의 값 2는 계산값 $f(2) = 0$과 다르다. 올바른 값은 0이다.
③ X — 선지의 값 1은 계산값 $f(2) = 0$과 다르다. 올바른 값은 0이다.
④ O — $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$에 $x = 2$를 대입하면 $f(2) = 0$이므로 옳다.

오답 포인트

첫 번째 극한만 보고 $f(x) = 2x^2$로 단정하면 안 된다. 이 극한은 최고차항의 계수만 정해 주며, 일차항과 상수항은 두 번째 극한 조건으로 결정해야 한다. 또한 두 번째 극한값이 유한하다는 사실에서 먼저 $f(1) = 0$을 끌어내야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

다항함수의 무한대 극한에서는 먼저 차수와 최고차항의 계수를 정한다. 이어 분모가 0이 되는 점에서 유한한 극한이 주어지면 분자도 0인지 확인하고, 공통인수를 약분한 뒤 남은 계수를 결정한다.

암기 포인트

무한대의 다항식 비는 최고차항이 결정하고, 0/0 꼴의 유한한 극한은 공통인수 약분이 결정한다.

NoteBase

문 12. 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2$의 접선 중 기울기가 최소인 접선의 방정식이 $y = mx + n$일 때, 상수 m, n에 대하여 $m - n$의 값은?

① -6

② 6

③ -3

④ 3

정답 1번

출제 포인트

도함수의 최솟값으로 접선의 최소 기울기를 구한 뒤, 그 기울기를 갖는 접점에서 접선의 방정식을 세우는 문제이다.

조건 정리

주어진 곡선은 $y = x^3 - 3x^2 + 2$이다.
구해야 할 값은 기울기가 최소인 접선 $y = mx + n$의 $m - n$이다.
접선의 기울기는 도함숫값이므로 먼저 y'의 최솟값과 그때의 접점을 함께 구해야 한다.

사용할 공식

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $x = a$에서 접선의 기울기는 $f'(a)$이고, 접선의 방정식은 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$이다.
이 문제에서는 모든 접선의 기울기가 도함수 $f'(x)$의 값으로 주어지므로 $f'(x)$를 완전제곱식으로 바꾸어 최솟값을 구한다.

계산 과정

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x - 1)^2 - 3$
$(x - 1)^2 \geq 0$이므로 접선의 기울기의 최솟값은 -3이고, 이때 $x = 1$이다. 따라서 $m = -3$이다.
접점의 y좌표는 $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$이므로 접점은 $(1, 0)$이다. 접선은
$y - 0 = -3(x - 1)$, $\quad y = -3x + 3$이므로 $n = 3$이다. 따라서 $m - n = -3 - 3 = -6$이다.

선지 판단

① O — 계산한 $m - n$의 값이 -6이므로 옳다.
② X — 6은 부호가 반대인 값이다. 올바른 값은 $m - n = -6$이다.
③ X — -3은 $m - n$이 아니라 최소 기울기 m의 값이다. 올바른 값은 $m - n = -6$이다.
④ X — 3은 $m - n$이 아니라 절편 n의 값이다. 올바른 값은 $m - n = -6$이다.

NoteBase

오답 포인트

최소 기울기 $m = -3$만 구하고 ③을 고르거나, 접선의 절편 $n = 3$만 구하고 ④를 고르기 쉽다. 문제에서 요구하는 것은 각각의 값이 아니라 $m - n$이므로 마지막 뺄셈까지 해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

접선의 기울기가 최대·최소인 문제는 도함수의 최댓값·최솟값을 먼저 구하고, 그때의 x값을 원래 함수에 대입하여 접점을 구한 다음 접선의 방정식을 세운다.

암기 포인트

접선의 기울기는 도함숫값이고, 기울기만으로는 절편을 알 수 없으므로 접점까지 구해야 한다.

NoteBase

문 13. 다항함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,5)$에서의 접선의 기울기가 3이다. 곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 $x=1$인 점에서의 접선의 기울기는?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 곱의 미분법을 이용하여 $x^2f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,5)$를 지나므로 $f(1)=5$이다.
그 점에서 접선의 기울기가 3이므로 $f'(1)=3$이다.
구해야 할 값은 $g(x)=x^2f(x)$로 둘 때 $g'(1)$이다.

사용할 공식

곱의 미분법에 따라
$(uv)'=u'v+uv'$
이므로
$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$
이다. x^2와 $f(x)$의 곱을 미분해야 하므로 두 항을 모두 포함하는 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$g'(1)=2\cdot1\cdot f(1)+1^2\cdot f'(1)$
$=2\cdot1\cdot5+1^2\cdot3=10+3=13$
따라서 접선의 기울기는 13이다.

선지 판단

① X — 11은 계산 결과 13과 다르다. 올바른 기울기는 11이 아니라 13이다.
② X — 12는 계산 결과 13과 다르다. 올바른 기울기는 12가 아니라 13이다.
③ O — 곱의 미분법으로 계산한 $g'(1)$이 13이므로 옳다.
④ X — 14는 계산 결과 13과 다르다. 올바른 기울기는 14가 아니라 13이다.

NoteBase

오답 포인트

$x^2f(x)$를 미분할 때 한쪽 인수만 미분하면 안 된다. $2xf(x)$와 $x^2f'(x)$를 모두 더해야 하며, 문제의 점 $(1, 5)$에서는 $f(1) = 5$임을 함께 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

함숫값과 접선의 기울기에서 각각 $f(a)$와 $f'(a)$를 읽고, 새 함수의 도함수를 먼저 구한 뒤 $x = a$를 대입한다.

암기 포인트

곱의 미분은 앞의 미분과 뒤의 미분을 한 번씩 번갈아 적용하여 $(uv)' = u'v + uv'$로 계산한다.

NoteBase

문 14. 닫힌 구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 6$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M + m$의 값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

정답 3번

출제 포인트

닫힌 구간에서 미분 가능한 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 때는 양 끝점과 구간 안의 임계점에서의 함숫값을 모두 비교한다.

조건 정리

주어진 함수: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 6$

구간: $[-2, 3]$

구해야 할 값: 최댓값 M과 최솟값 m의 합 $M + m$

사용할 공식

$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$

닫힌 구간에서의 절대적 최댓값과 최솟값은 구간의 양 끝점 및 $f'(x) = 0$인 내부 임계점의 함숫값을 비교하여 구한다. 이 문제의 내부 임계점은 $x = 0, 2$이다.

계산 과정

비교할 점은 양 끝점 $x = -2, 3$과 내부 임계점 $x = 0, 2$이다.

$f(-2) = 8 + 12 - 6 = 14$

$f(0) = -6$

$f(2) = -8 + 12 - 6 = -2$

$f(3) = -27 + 27 - 6 = -6$

따라서 최댓값은 $M = 14$, 최솟값은 $m = -6$이고, $M + m = 14 + (-6) = 8$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 4는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 값은 $M+m=8$이다.
② X — 6은 최솟값의 음의 부호를 잘못 처리하면 생각하기 쉬운 값이지만 계산 결과와 다르다. 틀린 값 6이 아니라 올바른 값은 $M+m=8$이다.
③ O — 최댓값 14와 최솟값 -6을 더하면 $14+(-6)=8$이므로 옳다.
④ X — 10은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 10이 아니라 올바른 값은 $M+m=8$이다.

오답 포인트

도함수의 근 $x=0$, 2만 조사하고 닫힌 구간의 양 끝점 $x=-2$, 3을 빠뜨리면 절대적 최댓값과 최솟값을 잘못 정한다. 또한 $m=-6$을 더할 때 음의 부호를 유지해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

닫힌 구간의 최댓값·최솟값 문제는 도함수가 0인 내부 임계점을 찾고, 그 점들과 양 끝점의 함숫값을 모두 계산한 뒤 가장 큰 값과 가장 작은 값을 비교하여 판단한다.

암기 포인트

닫힌 구간의 최댓값·최솟값은 '양 끝점 + 내부 임계점'의 함숫값을 모두 비교한다.

NoteBase

문 15. $f(x)=\int_2^x (t^2+1)(2t+3)dt$**일 때,** $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$**의 값은?**

① 20

② -20

③ 10

④ -10

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 미적분의 기본정리로 $f'(x)$를 구하고, $1+2h$의 변화량에 따른 계수 2를 반영하여 극한값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수: $f(x)=\int_2^x (t^2+1)(2t+3)dt$
구해야 할 값: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$
주의할 조건: 함수의 입력값 변화량은 h가 아니라 $2h$이므로 마지막에 계수 2가 생긴다.

사용할 공식

미적분의 기본정리에 따라

$f'(x)=(x^2+1)(2x+3)$

이다. 또한

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}=2\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}=2f'(1)$

이다. 이는 $x=1$에서 입력값이 $2h$만큼 변하므로 미분계수에 2를 곱해야 하기 때문이다.

계산 과정

1. $f'(1)=(1^2+1)(2\cdot 1+3)=2\cdot 5=10$이다.
2. 주어진 극한은 $2f'(1)$이므로 $2\cdot 10=20$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 20이므로 옳다.
② X — -20은 극한식에 근거 없이 음의 부호를 붙인 값이다. 올바른 값은 20이다.
③ X — 10은 $f'(1)$만 계산하고 입력값 변화량 $2h$에서 생기는 계수 2를 누락한 값이다. 올바른 값은 20이다.
④ X — -10은 계수 2를 누락하고 음의 부호까지 잘못 붙인 값이다. 올바른 값은 20이다.

NoteBase

오답 포인트

③의 10은 $f'(1)$을 구한 뒤 바로 답으로 고를 때 나오는 대표적인 오답이다. 분모가 h인 반면 함수의 입력 변화량은 $2h$이므로 계수 2를 반드시 반영해야 한다. 적분의 하한이 2라는 사실은 도함수의 부호를 음수로 바꾸지 않는다.

다시 나오면 이렇게 판단

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+ch)-f(a)}{h}$ 꼴은 분모를 ch로 맞추면 $cf'(a)$가 된다. 그다음 미적분의 기본정리로 $f'(a)$를 계산한다.

암기 포인트

입력값이 $a+ch$이면 미분계수 앞에 c가 붙는다: $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+ch)-f(a)}{h}=cf'(a)$.

NoteBase

문 16. $a > 2$**일 때, 곡선** $y = (x^2 - 2x)(x - a)$**와** x**축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때, 상수** a**의 값은?**

① 3

② 4

③ 5

④ 6

정답 2번

출제 포인트

두 구간의 넓이가 같다는 조건을 정적분의 부호를 이용하여 하나의 방정식으로 바꾸고 상수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

곡선의 식을 $f(x) = x(x-2)(x-a)$로 둔다. $a > 2$이므로 세 교점의 순서는 $0 < 2 < a$이다. $0 < x < 2$에서는 $f(x) > 0$, $2 < x < a$에서는 $f(x) < 0$이다. 따라서 첫째 부분의 넓이는 $\int_0^2 f(x)dx$, 둘째 부분의 넓이는 $-\int_2^a f(x)dx$이다.

사용할 공식

두 넓이가 같으면

$\int_0^2 f(x)dx = -\int_2^a f(x)dx$

이므로

$\int_0^a f(x)dx = 0$

이다. 한 구간에서는 그래프가 x축 위에 있고 다른 구간에서는 아래에 있으므로, 두 넓이의 같음을 전체 구간의 정적분이 0이라는 조건으로 바꿀 수 있다.

계산 과정

먼저 식을 전개하면

$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$

이다. 따라서

aligned ∫ _0^a f(x) dx&=≤ft[(x^4)/(4)-((a+2)x^3)/(3)+ax^2]_0^a\\&=(a^4)/(4)-((a+2)a^3)/(3)+a^3\\&=(a^3(4-a))/(12).aligned

넓이가 같으려면 $\frac{a^3(4-a)}{12} = 0$이어야 한다. $a > 2$이므로 $a = 4$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a=3$이면 전체 정적분은 $\frac{3^3(4-3)}{12}=\frac{9}{4}$로 0이 아니므로 두 넓이가 같지 않다. 틀린 값 3 → 올바르게는 4이다.
② O — $a=4$이면 전체 정적분이 $\frac{4^3(4-4)}{12}=0$이므로 두 부분의 넓이가 같다.
③ X — $a=5$이면 전체 정적분은 $\frac{5^3(4-5)}{12}=-\frac{125}{12}$로 0이 아니다. 틀린 값 5 → 올바르게는 4이다.
④ X — $a=6$이면 전체 정적분은 $\frac{6^3(4-6)}{12}=-36$으로 0이 아니다. 틀린 값 6 → 올바르게는 4이다.

오답 포인트

넓이는 항상 양수이지만 정적분은 x축 아래에서 음수이다. 두 부분의 넓이를 각각 양수로 더하는 것이 아니라, 부호가 반대인 두 정적분의 합을 0으로 두어야 한다. 또한 방정식의 해 $a=0$은 조건 $a>2$를 만족하지 않으므로 제외된다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 근의 순서와 각 구간에서 함수의 부호를 확인한다. 인접한 두 부분이 x축의 위와 아래에 있고 넓이가 같으면, 양 끝점 사이의 전체 정적분을 0으로 놓아 계산한다. 마지막에는 구한 해가 매개변수의 범위 조건을 만족하는지 확인한다.

암기 포인트

위쪽 넓이와 아래쪽 넓이가 같으면 전체 부호 있는 넓이, 즉 정적분은 0이다.

NoteBase

문 17. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})^2\frac{3}{n}$의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

정답 4번

출제 포인트

리만 합을 정적분으로 바꾸거나 거듭제곱의 합 공식을 이용하여 극한값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 합은 $\Delta x = 1/n$, $x_k = k/n$인 리만 합이다. 합 앞의 $3/n$을 보면 함수는 $f(x) = 3(1+x)^2$이고 구간은 $[0, 1]$이다.

사용할 공식

리만 합의 정의에 따라
$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$
를 사용한다. 이 문제의 각 항이 $3(1+k/n)^2(1/n)$ 꼴이므로 이 공식을 적용할 수 있다.

계산 과정

주어진 극한을 정적분으로 바꾸면
$\int_0^1 3(1+x)^2dx = [(1+x)^3]_0^1 = 2^3 - 1^3 = 7$
이다. 따라서 극한값은 7이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 7이므로 4는 틀린 값이다. 올바르게는 극한값이 7이다.
② X — 계산 결과는 7이므로 5는 틀린 값이다. 올바르게는 극한값이 7이다.
③ X — 계산 결과는 7이므로 6은 틀린 값이다. 올바르게는 극한값이 7이다.
④ O — 정적분 $\int_0^1 3(1+x)^2dx$의 값이 7이므로 옳다.

오답 포인트

$3/n$ 전체를 리만 합의 폭으로 보아 구간 길이를 3으로 잡는 것이 함정이다. 폭은 $1/n$이고 3은 함수 $3(1+x)^2$에 포함된다. 또한 원시함수는 $(1+x)^3$이므로 위끝값뿐 아니라 아래끝값 1^3도 빼야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

k/n과 $1/n$이 함께 보이면 먼저 $x_k = k/n$, $\Delta x = 1/n$으로 놓고 구간과 함수를 확인한 뒤 정적분으로 바꾼다.

암기 포인트

k/n은 표본점, $1/n$은 폭이며, 상수 3은 함수에 포함된다.

NoteBase

문 18. 방정식 $x+y+z+w=15$를 만족시키는 $x\geq 2,\ y\geq 2,\ z\geq 2,\ w\geq 2$인 자연수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는?

① 120

② 140

③ 160

④ 180

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 각 변수의 하한을 제거한 뒤 중복조합으로 음이 아닌 정수해의 개수를 구하는 문제이다.

조건 정리

각 변수는 2 이상이고, 네 변수의 합은 15이다. $a=x-2,\ b=y-2,\ c=z-2,\ d=w-2$로 놓으면 a, b, c, d는 모두 0 이상의 정수이다.

사용할 공식

음이 아닌 정수해의 개수 공식은 $u_1+u_2+\cdots+u_r=n$일 때 $\binom{n+r-1}{r-1}$이다. 하한 2를 각 변수에서 빼면 이 공식을 적용할 수 있다.

계산 과정

하한을 제거하면

$$a+b+c+d=15-8=7$$

이 된다. 따라서 음이 아닌 정수해의 개수는

$$\binom{7+4-1}{4-1}=\binom{10}{3}=120$$

이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과가 120이므로 옳다.
② X — 140은 계산 결과와 다르다. ‘140’은 ‘120’으로 고쳐야 한다.
③ X — 160은 계산 결과와 다르다. ‘160’은 ‘120’으로 고쳐야 한다.
④ X — 180은 계산 결과와 다르다. ‘180’은 ‘120’으로 고쳐야 한다.

오답 포인트

각 변수가 2 이상이라는 조건을 그대로 두고 중복조합 공식을 적용하면 안 된다. 네 변수에서 각각 2를 빼므로 합에서 총 8을 빼야 하며, 변환된 합은 7이다.

다시 나오면 이렇게 판단

변수마다 공통 하한이 있으면 먼저 각 변수에서 그 하한을 빼서 0 이상의 정수로 바꾼 뒤, 남은 합에 중복조합 공식을 적용한다.

암기 포인트

하한 제거 후 합이 n인 r개의 음이 아닌 정수해 개수는 $\binom{n+r-1}{r-1}$이다.

NoteBase

문 19. 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 1의 눈이 2번 나올 확률은?

① $\frac{2}{72}$
② $\frac{3}{72}$
③ $\frac{4}{72}$
④ $\frac{5}{72}$

정답 4번

출제 포인트

독립시행에서 특정 결과가 정확히 정해진 횟수만큼 나올 확률을 이항확률로 계산하는 문제이다.

조건 정리

주사위를 던지는 횟수는 3번이다.
한 번 던져 1이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$, 1이 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{5}{6}$이다.
구해야 하는 것은 3번 중 정확히 2번만 1이 나올 확률이다.

사용할 공식

$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$
1이 나오는 두 번의 위치를 3번 중에서 고르는 경우가 $\binom{3}{2}$가지이고, 나머지 한 번에는 반드시 1이 아닌 눈이 나와야 하므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{15}{216}=\frac{5}{72}$
전체 216개의 순서 있는 결과 중, 1이 나오는 두 위치를 고르는 3가지와 나머지 한 번에 나올 수 있는 1 이외의 눈 5가지를 곱한 15개가 유리한 결과이다.

선지 판단

① X — $\frac{2}{72}=\frac{6}{216}$이므로 유리한 결과 15개를 반영한 확률이 아니다. 올바르게는 $\frac{5}{72}$이다.
② X — $\frac{3}{72}=\frac{9}{216}$이므로 정확히 두 번 1이 나오는 15개 결과와 일치하지 않는다. 올바르게는 $\frac{5}{72}$이다.
③ X — $\frac{4}{72}=\frac{12}{216}$이므로 유리한 결과의 수를 부족하게 센 값이다. 올바르게는 $\frac{5}{72}$이다.
④ O — $\frac{5}{72}=\frac{15}{216}$로 계산 결과와 일치한다.

오답 포인트

‘1이 2번 나온다’를 ‘적어도 2번 나온다’로 읽거나, 1이 나오는 위치를 고르는 $\binom{3}{2}$와 나머지 한 번에 1이 나오지 않을 확률 $\frac{5}{6}$ 중 하나를 빠뜨리기 쉽다. 이 문항은 정확히 2번이므로 남은 한 번은 반드시 1이 아니어야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

‘정확히 r번’인 독립시행 문제는 성공 위치를 고르는 경우의 수 $\binom{n}{r}$, 성공확률의 곱 p^r, 실패확률의 곱 $(1-p)^{n-r}$을 차례로 곱해 판단한다.

암기 포인트

정확히 r번 성공할 확률은 $\binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$이다.

문 20. 640명을 모집하는 어느 대학의 입학시험에 4000명이 응시하였다. 수험생의 시험 성적은 평균이 450점, 표준편차가 75점인 정규분포를 따른다고 할 때, 합격자의 최저 점수는? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 1) = 0.34$로 계산한다.)

① 375점

② 525점

③ 575점

④ 625점

정답 2번

출제 포인트

모집 인원이 전체 응시자의 상위 몇 %인지 구한 뒤, 표준정규분포에서 그 비율에 해당하는 표준점수와 원점수의 경계를 찾는 문제이다.

조건 정리

응시자는 4000명이고 합격자는 640명이므로 합격 비율은 $640/4000 = 0.16$, 즉 상위 16%이다. 성적의 평균은 450점, 표준편차는 75점이다. 합격자의 최저 점수는 상위 16%가 시작되는 경계 점수이다.

사용할 공식

표준화 공식은 $Z = (X - \mu)/\sigma$이고, 원점수로 바꾸면 $X = \mu + Z\sigma$이다. 정규분포는 평균을 중심으로 대칭이므로 $P(Z \ge 1) = 0.5 - P(0 \le Z \le 1) = 0.5 - 0.34 = 0.16$이다. 따라서 상위 16%의 경계에는 $Z = 1$을 사용한다.

계산 과정

1. 합격 비율을 구하면 $640/4000 = 0.16$이다.
2. 합격자는 상위 16%이므로 $P(Z \ge z) = 0.16$인 z를 찾는다. 주어진 확률에서 $P(Z \ge 1) = 0.5 - 0.34 = 0.16$이므로 $z = 1$이다.
3. 원점수로 환산하면 $X = 450 + 1 \times 75 = 525$ 따라서 합격자의 최저 점수는 525점이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 375점은 $450-75$로 $Z=-1$에 해당한다. 이는 하위 16%의 경계이므로 '합격자의 최저 점수 375점'은 틀리고, 올바른 값은 525점이다.
② O — 525점은 $450+75$로 $Z=1$에 해당하며, 그보다 높은 점수의 비율이 16%이므로 합격자의 최저 점수이다.
③ X — 575점은 $Z=(575-450)/75=5/3$에 해당하여 상위 16%의 경계인 $Z=1$보다 높다. '합격자의 최저 점수 575점'은 틀리고, 올바른 값은 525점이다.
④ X — 625점은 $Z=(625-450)/75=7/3$에 해당하여 상위 16%의 경계인 $Z=1$보다 높다. '합격자의 최저 점수 625점'은 틀리고, 올바른 값은 525점이다.

오답 포인트

①의 375점은 상위 16%를 구해야 하는데 $Z=1$ 대신 $Z=-1$을 대입하면 나오는 값이다. '합격자의 최저 점수'는 낮은 점수 쪽 하위 16% 경계가 아니라 높은 점수 쪽 상위 16% 경계라는 점이 핵심이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 선발 인원 비율을 구하고, 합격자가 상위 집단인지 확인한 다음, 그 꼬리확률에 맞는 Z의 부호를 정하여 $X=\mu+Z\sigma$로 환산한다.

암기 포인트

평균보다 높은 상위 16%의 경계는 $Z=1$, 즉 평균에 표준편차 1개를 더한 점수이다.

NoteBase