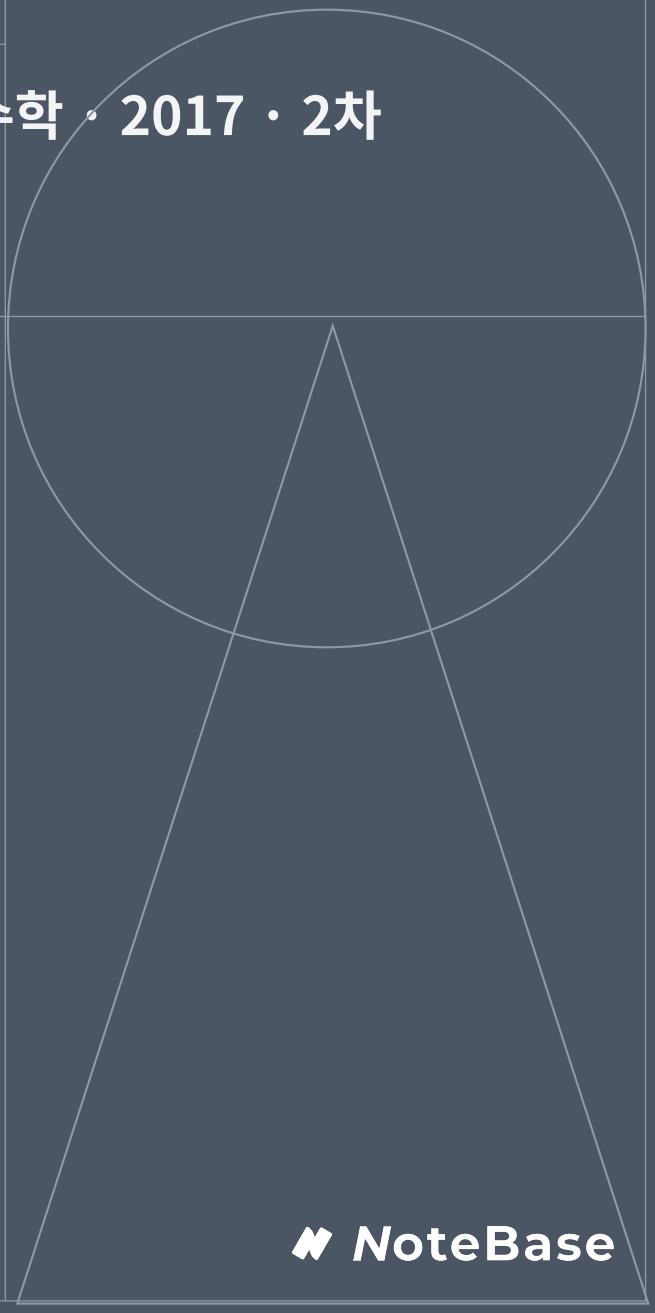
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2017 · 2차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2017 · 2차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2017 · 2차

문 1. $x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$**일 때,** $x^2 + y^2$**의 값은?**

① 12

② 14

③ 16

④ 18

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 두 수의 합과 곱을 구한 뒤 항등식 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$를 이용해 제곱의 합을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값은 $x = 2 + \sqrt{3}, y = 2 - \sqrt{3}$이다. 두 수를 직접 제곱하기보다 먼저 $x + y = 4$, $xy = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$을 구하면 계산이 간단해진다. 구해야 할 값은 $x^2 + y^2$이다.

사용할 공식

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

따라서 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$이다. 문제의 두 수가 서로 켤레인 형태이므로 합에서는 근호항이 소거되고, 곱에는 합차공식을 적용할 수 있어 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. $x + y = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$이다.
2. $xy = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$이다.
3. $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 12는 계산 결과 14와 다르다. 선지의 '12'가 틀렸으며, 올바른 값은 14이다.
② O — $x^2 + y^2 = 14$이므로 옳다.
③ X — 16은 $x + y$를 제곱한 값으로, $2xy$를 빼지 않은 결과이다. 선지의 '16'이 틀렸으며, 올바른 값은 14이다.
④ X — 18은 $2xy$를 빼야 하는데 더하면 나오는 값이다. 선지의 '18'이 틀렸으며, 올바른 값은 14이다.

오답 포인트

$(x + y)^2$을 $x^2 + y^2$와 같다고 보아 ③을 고르기 쉽다. 전개식에는 교차항 $2xy$가 있으므로, 제곱합을 구할 때는 반드시 이를 빼야 한다. 부호를 반대로 적용하면 ④의 18이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 수가 $a + b, a - b$처럼 켤레 형태이면 먼저 합과 곱을 구한다. 그다음 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$에 대입하고 교차항의 부호를 확인한다.

암기 포인트

제곱의 합은 '합의 제곱에서 곱의 두 배를 뺀 값', 즉 $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$이다.

NoteBase

문 2. 다항식 $x^{2017}-1$을 x^2-x로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(2017)$의 값은?

① -2016

② -2015

③ 2015

④ 2016

정답 4번

출제 포인트

나머지정리와 나머지의 차수 조건을 이용해 일차식인 나머지 $R(x)$를 결정하는 문제이다.

조건 정리

나누는 식은 $x^2-x=x(x-1)$이고 차수가 2이므로 나머지는 $R(x)=ax+b$로 놓을 수 있다. 구해야 할 값은 $R(2017)$이다.

사용할 공식

$P(x)=x^{2017}-1$이라 하면 $P(x)=(x^2-x)Q(x)+R(x)$이다. 나누는 식이 0이 되는 $x=0,1$에서는 각각 $R(0)=P(0), R(1)=P(1)$이 성립한다. 이는 이 두 값을 대입하면 몫을 포함한 항이 0이 되기 때문이다.

계산 과정

1. $x=0$을 대입하면 $R(0)=P(0)=0^{2017}-1=-1$이므로 $b=-1$이다.
2. $x=1$을 대입하면 $R(1)=P(1)=1^{2017}-1=0$이므로 $a+b=0$이다. 따라서 $a=1$이다.
3. 그러므로 $R(x)=x-1$이고, $R(2017)=2017-1=2016$이다.

선지 판단

① X — -2016은 계산 결과의 부호를 반대로 쓴 값이다. 틀린 표현 → 올바르게는 2016이다.
② X — -2015는 $R(x)=x-1$에 2017을 정확히 대입한 값이 아니다. 틀린 표현 → 올바르게는 2016이다.
③ X — 2015는 $2017-1$을 잘못 계산한 값이다. 틀린 표현 → 올바르게는 2016이다.
④ O — $R(x)=x-1$이므로 $R(2017)=2016$과 일치한다.

오답 포인트

x^{2017}을 직접 전개하려 하거나, $R(0)=-1$만 보고 나머지를 상수 -1로 단정하면 틀린다. 나머지는 차수가 2보다 작은 일차식일 수 있으므로 두 근 0,1에서의 값을 모두 이용해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

나누는 다항식의 근들을 원래 다항식과 나머지에 대입해 나머지의 계수를 결정한 뒤, 문제에서 요구한 값을 대입한다.

암기 포인트

$P(x)$를 $(x-r_1)(x-r_2)$로 나눈 나머지가 일차식이면 $R(r_1)=P(r_1), R(r_2)=P(r_2)$로 정한다.

NoteBase

문 3. 등식 $(m+2)a-(m+1)b+m-7=0$이 m의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, b의 차 $a-b$의 값은?

① -2

② -1

③ 1

④ 2

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 주어진 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하는 항등식임을 이용하여, m의 계수와 상수항을 각각 0으로 놓고 $a-b$를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 등식은 m에 대한 항등식이다. 따라서 좌변을 m에 관해 정리했을 때 m의 계수와 상수항이 모두 0이어야 한다. 구해야 할 값은 $a-b$이다.

사용할 공식

$Am+B=0$
이 식이 모든 m에 대하여 성립하면 $A=0, B=0$이다. 이 문제의 등식이 특정한 m에서만 성립하는 방정식이 아니라 모든 m에서 성립하는 항등식이므로 이 원리를 사용한다.

계산 과정

좌변을 m에 관해 정리한다.
$(m+2)a-(m+1)b+m-7$
$=ma+2a-mb-b+m-7$
$=m(a-b+1)+(2a-b-7)$
항등식이므로 각 계수가 0이다.
$a-b+1=0, \qquad 2a-b-7=0$
첫 번째 식에서 바로
$a-b=-1$
을 얻는다. 확인하면 $b=a+1$이고, 이를 두 번째 식에 대입하여 $a=8, b=9$이므로 $a-b=-1$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 제시값 -2는 계산 결과 $a-b=-1$과 다르다. 올바른 값은 -1이다.
② O — m의 계수 $a-b+1$을 0으로 놓으면 $a-b=-1$이므로 맞다.
③ X — 제시값 1은 $a-b=-1$의 부호를 반대로 쓴 값이다. 올바른 값은 -1이다.
④ X — 제시값 2는 계산 결과 $a-b=-1$과 다르다. 올바른 값은 -1이다.

오답 포인트

등식이 항상 성립한다는 조건을 놓치고 임의의 m 하나만 대입하면 a, b를 결정할 식이 부족해진다. 또한 $a-b+1=0$에서 상수항 1을 이항할 때 부호를 바꾸지 않으면 ③의 1을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

문자 m의 값에 관계없이 항상 성립한다는 표현이 나오면 식을 m의 차수별로 정리하고, 같은 차수의 계수를 각각 0으로 놓아 판단한다.

암기 포인트

모든 m에 대해 $Am+B=0$이면 $A=0, B=0$이다.

NoteBase

문 4. 무리수 $\sqrt{6-\sqrt{20}}$의 소수부분이 x에 관한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근일 때, 두 유리수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -5

② -4

③ 4

④ 5

정답 2번

출제 포인트

중첩근호를 간단히 한 뒤 무리수의 소수부분을 구하고, 그 수를 근으로 갖는 유리수 계수 이차방정식을 만드는 문제이다.

조건 정리

주어진 무리수: $\sqrt{6-\sqrt{20}}$
구해야 할 값: 소수부분을 근으로 갖는 $x^2+ax+b=0$에서 ab
주의할 조건: 소수부분은 원래 수에서 정수부분을 뺀 값이다.

사용할 공식

$(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2=m+n-2\sqrt{mn}$
또한 어떤 수 r가 방정식의 근이면 r를 대입한 식의 값이 0이 된다. 주어진 중첩근호가 두 제곱근의 차의 제곱꼴이고, 소수부분에 포함된 근호를 없애면 유리수 계수의 이차방정식을 얻을 수 있으므로 이 원리를 사용한다.

계산 과정

6-√(20)=6-25=(5-1)^2
5-1>0이므로 6-√(20)=5-1이다. 이 수는 1과 2 사이이므로 정수부분은 1이고 소수부분은 5-2이다.
소수부분을 x=5-2로 놓으면 x+2=5이므로
$(x+2)^2=5$
$x^2+4x-1=0$
따라서 $a=4$, $b=-1$이고, $ab=4\times(-1)=-4$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — -5는 $b-a=-1-4$를 계산한 값으로, 요구한 곱이 아니다. 틀린 값 -5 → 올바르게는 $ab=-4$이다.
② O — $a=4$, $b=-1$이므로 $ab=-4$이다.
③ X — 4는 계수 a의 값일 뿐 a와 b의 곱이 아니다. 틀린 값 4 → 올바르게는 $ab=-4$이다.
④ X — 5는 $a-b=4-(-1)$을 계산한 값으로, 요구한 곱이 아니다. 틀린 값 5 → 올바르게는 $ab=-4$이다.

오답 포인트

5-1의 소수부분에서 정수부분 1을 한 번 더 빼야 한다. 소수부분은 5-2이며, 방정식을 전개할 때 상수항이 $4-5=-1$이 된다는 점과 마지막에 묻는 값이 계수의 차가 아니라 곱 ab라는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

중첩근호를 (m- n)^2 꼴로 정리한 뒤 양의 제곱근을 선택하고, 정수부분을 빼서 소수부분을 구한다. 그 소수부분을 x로 놓고 근호를 한쪽에 남겨 제곱하면 유리수 계수의 이차방정식을 얻는다.

암기 포인트

중첩근호 정리 → 소수부분 계산 → 근호 제거 → 계수 확인의 순서이며, ab는 두 계수의 곱이다.

NoteBase

문 5. 함수 $y=\left[\frac{x}{3}\right]^2-4\left[\frac{x}{3}\right]+6$의 값이 최소가 되도록 하는 x의 범위가 $\alpha \le x<\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 15

② 16

③ 17

④ 18

정답 1번

출제 포인트

가우스 기호가 포함된 식에서 $n=\left[\frac{x}{3}\right]$으로 치환한 뒤 이차식의 최솟값과 그때의 x의 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

$[t]$는 t보다 크지 않은 최대의 정수이다.
$n=\left[\frac{x}{3}\right]$으로 두면 함수의 값은 n^2-4n+6이 된다.
구해야 할 것은 이 값이 최소가 되는 구간 $\alpha \le x<\beta$의 양 끝값의 합 $\alpha+\beta$이다.

사용할 원리

완전제곱식을 이용하면
$n^2-4n+6=(n-2)^2+2$
이다. 제곱은 항상 0 이상이므로 이 식은 $n=2$일 때 최소가 된다. 또한 $\left[\frac{x}{3}\right]=2$는 가우스 기호의 정의에 따라 $2 \le \frac{x}{3}<3$과 같다.

계산 과정

1. $n=\left[\frac{x}{3}\right]$으로 두면 $(n-2)^2+2$의 최솟값은 $n=2$일 때의 2이다.
2. $\left[\frac{x}{3}\right]=2$이므로 $2 \le \frac{x}{3}<3$이다.
3. 각 변에 3을 곱하면 $6 \le x<9$이다. 따라서 $\alpha=6, \beta=9$이고 $\alpha+\beta=15$이다.

선지 판단

① O — 계산 결과 $\alpha+\beta=6+9=15$이므로 맞다.
② X — 16은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 16은 올바르게는 15이다.
③ X — 17은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 17은 올바르게는 15이다.
④ X — 18은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 18은 올바르게는 15이다.

NoteBase

오답 포인트

$n=2$만 구하고 끝내거나 $\left[\frac{x}{3}\right]=2$를 하나의 x값으로 해석하면 안 된다. 가우스 기호의 값이 2인 조건은 반열린구간 $6 \le x < 9$이며, 오른쪽 끝값 9는 구간에 포함되지 않아도 $\beta=9$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

가우스 기호 전체를 정수 변수로 치환하여 식의 최솟값을 만드는 정수를 먼저 찾고, 그 정숫값을 다시 부등식으로 바꾸어 원래 변수의 범위를 구한다.

암기 포인트

$[u]=k$와 $k \le u < k+1$은 동치이다.

NoteBase

문 6. 연립부등식 casesx^2-5x+6>0\^2-(k+4)x+4k≤ 0cases의 해가 $3 < x \leq 4$가 되도록 하는 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 4번

출제 포인트

두 이차부등식의 해집합을 각각 구한 뒤, 그 교집합이 정확히 $3 < x \leq 4$가 되도록 하는 k의 범위를 찾는 문제이다.

조건 정리

첫째 부등식의 해집합과 둘째 부등식의 해집합의 교집합이 정확히 $(3, 4]$이어야 한다. 따라서 $x < 2$인 해가 교집합에 포함되면 안 되고, 3<x≤4는 모두 교집합에 포함되어야 한다.

사용할 공식

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

$x^2 - (k + 4)x + 4k = (x - 4)(x - k)$

각 이차식의 최고차항 계수가 양수이므로 곱이 양수이면 두 근의 바깥쪽, 곱이 0 이하이면 두 근 사이가 해가 된다.

계산 과정

1. 첫째 부등식은 $(x - 2)(x - 3) > 0$이므로 해집합은 $x < 2$ 또는 $x > 3$이다.
2. 둘째 부등식은 (x-4)(x-k)≤0이다. k≤4이면 해집합은 $[k, 4]$이다.
3. $x < 2$인 구간과의 교집합을 없애려면 k≥2이어야 한다. 또한 $x > 3$인 구간과의 교집합이 $(3, 4]$ 전체가 되려면 k≤3이어야 한다. 따라서 2≤ k≤3이다.
4. k≥4이면 둘째 부등식의 해집합은 $[4, k]$이므로 교집합이 $(3, 4]$가 될 수 없다.
5. k의 최솟값은 2, 최댓값은 3이므로 그 합은 $2 + 3 = 5$이다.

선지 판단

① X — 2는 최솟값 하나만 적은 값이다. 최댓값과 최솟값의 합은 5이다.

② X — 3은 최댓값 하나만 적은 값이다. 최댓값과 최솟값의 합은 5이다.

③ X — 4는 두 끝값의 합이 아니다. 올바른 합은 $2 + 3 = 5$이다.

④ O — k의 범위가 2≤ k≤3이므로 최댓값과 최솟값의 합은 5이다.

NoteBase

오답 포인트

둘째 부등식만 보고 k≤3만 잡으면 첫째 부등식의 $x < 2$ 구간에서 불필요한 해가 생길 수 있다. 교집합이 목표 해집합과 같으려면 필요한 구간을 모두 포함하는 조건과 불필요한 구간을 배제하는 조건을 함께 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

각 부등식의 해집합을 구한 뒤 교집합을 표시하고, 목표 구간의 포함 여부와 목표 밖 구간의 배제 여부를 각각 조건으로 세운다. 매개변수가 근으로 들어가면 근의 순서가 바뀌는 경우도 나누어 확인한다.

암기 포인트

연립부등식의 해는 교집합이다. '정확히 같은 해집합' 조건에서는 필요한 구간의 포함과 불필요한 구간의 배제를 모두 확인한다.

NoteBase

문 7. 이차함수 $f(x)=x^2+4x+k$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 6일 때, $f(x)$의 최솟값은?

① -11

② -10

③ -9

④ -8

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 이차방정식의 두 근 사이의 거리로 판별식과 상수 k를 구한 뒤, 이차함수의 꼭짓값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=x^2+4x+k$이고, 그래프와 x축의 두 교점 사이의 거리는 두 근의 차인 6이다. 구해야 할 값은 위로 열린 포물선의 최솟값이다.

사용할 공식

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$

이다. 두 교점의 x좌표가 방정식 $f(x)=0$의 두 근이므로 이 공식을 사용한다. 또한 완전제곱식으로 바꾸면 꼭짓점에서의 최솟값을 바로 구할 수 있다.

계산 과정

$a=1, b=4, c=k$이므로

$\sqrt{16-4k}=6$

이다. 양변을 제곱하면 $16-4k=36$이므로 $k=-5$이다.

따라서

$f(x)=x^2+4x-5=(x+2)^2-9$

이다. $(x+2)^2\geq 0$이므로 $x=-2$일 때 최솟값은 -9이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산된 최솟값은 -9이므로 '-11'은 틀린 값이다. 올바르게는 '-9'이다.

② X — 계산된 최솟값은 -9이므로 '-10'은 틀린 값이다. 올바르게는 '-9'이다.

③ O — $f(x) = (x+2)^2 - 9$이고 제곱항의 최솟값이 0이므로 함수의 최솟값은 -9이다.

④ X — 계산된 최솟값은 -9이므로 '-8'은 틀린 값이다. 올바르게는 '-9'이다.

오답 포인트

두 교점 사이의 거리 6을 판별식 자체로 두면 안 된다. 근의 차는 $\sqrt{D}/|a|$이므로 이 문제에서는 $D = 36$이다. 또한 $k = -5$를 구한 뒤 이를 최솟값으로 착각하지 않고, 완전제곱하여 꼭짓값 -9를 구해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

두 근 사이의 거리가 주어지면 먼저 $|\alpha - \beta| = \sqrt{D}/|a|$로 계수를 결정하고, 그다음 함수를 완전제곱하여 꼭짓값을 구한다.

암기 포인트

두 근의 거리에는 판별식의 제곱근을 사용하고, 이차함수의 최댓값·최솟값은 완전제곱식의 꼭짓값으로 판단한다.

NoteBase

문 8. 두 직선 $x+y=3$, $2x-3y=1$의 교점과 점 $(3,3)$을 지나는 직선의 방정식은?

① $y=x+2$

② $y=2x-3$

③ $y=2x+1$

④ $y=3x-6$

정답 2번

출제 포인트

두 직선의 교점을 구한 뒤, 두 점을 지나는 직선의 기울기와 방정식을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 두 직선은 $x+y=3$, $2x-3y=1$이다. 두 직선의 교점을 P라 하면, 구하는 직선은 P와 $(3,3)$을 모두 지나야 한다.

사용할 공식

두 점 (x_1,y_1), (x_2,y_2)를 지나는 직선의 기울기는 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$이고, 한 점 (x_1,y_1)을 지나는 직선은 $y-y_1=m(x-x_1)$으로 나타낸다. 교점을 먼저 구해야 구하는 직선 위의 두 점을 확정할 수 있으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$x+y=3$에서 $y=3-x$이다. 이를 $2x-3y=1$에 대입하면

$2x-3(3-x)=1$

$5x=10$

이므로 $x=2$, $y=1$이고 교점은 $(2,1)$이다. $(2,1)$과 $(3,3)$을 지나는 직선의 기울기는

$m=\frac{3-1}{3-2}=2$

이다. 따라서

$y-1=2(x-2)$

이므로 구하는 직선은 $y=2x-3$이다.

NoteBase

선지 판단

① X — $y = x + 2$는 $(3, 3)$을 대입하면 $3 = 5$가 되어 주어진 점을 지나지 않는다. 틀린 식이며, 올바른 식은 $y = 2x - 3$이다.
② O — $y = 2x - 3$은 $(2, 1)$과 $(3, 3)$을 모두 만족하므로 구하는 직선이다.
③ X — $y = 2x + 1$은 기울기는 2이지만 $(2, 1)$을 대입하면 $1 = 5$가 되어 교점을 지나지 않는다. 틀린 상수항 $+1$은 -3으로 고쳐 $y = 2x - 3$으로 써야 한다.
④ X — $y = 3x - 6$은 $(3, 3)$은 지나지만 $(2, 1)$을 대입하면 $1 = 0$이 되어 교점을 지나지 않는다. 틀린 기울기와 상수항을 고친 식은 $y = 2x - 3$이다.

오답 포인트

두 직선의 교점 $(2, 1)$만 구한 뒤 직선의 방정식을 완성하지 않거나, 기울기 2를 구하고도 점을 대입할 때 상수항의 부호를 잘못 처리하면 ③을 고르기 쉽다. 구한 식에 두 점을 모두 대입해 검산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 연립방정식으로 교점을 구하고, 그 교점과 추가로 주어진 점으로 기울기를 계산한 뒤, 점-기울기식에 대입하여 직선의 방정식을 정리한다. 마지막에는 두 점을 모두 대입해 확인한다.

암기 포인트

교점 → 두 점의 기울기 → 점-기울기식의 순서로 계산한다.

NoteBase

문 9. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$과 중심이 같고 x축에 접하는 원의 넓이는?

① π

② 2π

③ 3π

④ 4π

정답 1번

출제 포인트

원의 방정식을 완전제곱식으로 바꾸어 중심을 찾고, 중심에서 x축까지의 거리를 새 원의 반지름으로 정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 원: $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20$
새 원의 중심: 주어진 원과 같다.
새 원의 조건: x축에 접한다.
구해야 할 값: 새 원의 넓이

사용할 공식

완전제곱식은 $x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4$, $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$이다. 원의 넓이는 $A = \pi r^2$이다.
원을 표준형 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$으로 바꾸면 중심 (a, b)를 알 수 있다. 또한 중심이 (a, b)인 원이 x축에 접하면 반지름은 중심에서 x축까지의 거리 $|b|$이다.

계산 과정

주어진 원의 방정식을 완전제곱하면
$(x+2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 = 20$
$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$
이므로 중심은 $(-2, 1)$이다.
이 중심에서 x축까지의 거리는 $|1| = 1$이므로 새 원의 반지름은 $r = 1$이다. 따라서 넓이는
$A = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산한 넓이 π와 일치한다.
② X — 2π는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 2π → 올바른 넓이는 π이다.
③ X — 3π는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 3π → 올바른 넓이는 π이다.
④ X — 4π는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 4π → 올바른 넓이는 π이다.

오답 포인트

주어진 원의 반지름은 5이지만 새 원은 주어진 원과 중심만 같을 뿐 반지름까지 같은 원이 아니다. 새 원이 x축에 접한다는 조건에 따라 중심의 y좌표의 절댓값 $|1|$을 반지름으로 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 원의 방정식을 표준형으로 바꾸어 중심을 찾는다. 좌표축에 접하는 원은 중심에서 그 좌표축까지의 거리가 반지름이라는 관계를 적용한 뒤, $A = \pi r^2$로 넓이를 계산한다.

암기 포인트

중심 (a, b)인 원이 x축에 접하면 $r = |b|$, y축에 접하면 $r = |a|$이다.

NoteBase

문 10. 부등식 $x^2 + y^2 \le 1$이 나타내는 영역이 부등식 $y \le x + m$이 나타내는 영역에 포함될 때, 실수 m의 최솟값은?

① $-\sqrt{3}$
② $-\sqrt{2}$
③ $\sqrt{2}$
④ $\sqrt{3}$

정답 3번

출제 포인트

단위원 전체가 반평면에 포함되도록 하는 조건을 세우고, 단위원에서 일차식의 최댓값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 영역은 $x^2 + y^2 \le 1$인 단위원의 내부와 경계이다.
포함 조건 $y \le x + m$을 정리하면 단위원의 모든 점에서 $y - x \le m$이어야 한다.
따라서 구해야 할 값은 단위원에서 $y - x$가 가질 수 있는 최댓값이다.

사용할 공식

코시-슈바르츠 부등식에 따라
$y - x = (-1, 1) \cdot (x, y) \le \sqrt{(-1)^2 + 1^2}\sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{2}$.
단위원에서는 $x^2 + y^2 \le 1$이므로 이 공식을 이용해 일차식 $y - x$의 최댓값을 구할 수 있다.

계산 과정

1. 포함 조건을 $y - x \le m$으로 바꾼다.
2. 단위원에서 $y - x \le \sqrt{2}$이고, $x = -1/\sqrt{2},\ y = 1/\sqrt{2}$일 때 등호가 성립한다.
3. 따라서 단위원 전체를 포함하려면 $m \ge \sqrt{2}$이어야 하므로 m의 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

선지 판단

① X — $-\sqrt{3}$은 필요한 하한 $\sqrt{2}$보다 작아 단위원 전체를 포함하지 못한다. 틀린 값 $-\sqrt{3}$ → 올바른 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.
② X — $-\sqrt{2}$는 최댓값을 구하면서 부호를 반대로 취한 값이다. 틀린 값 $-\sqrt{2}$ → 올바른 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.
③ O — 단위원에서 $y - x$의 최댓값이 정확히 $\sqrt{2}$이므로 포함 조건을 만족하는 m의 최솟값이다.
④ X — $\sqrt{3}$이면 포함 조건 자체는 만족하지만 $\sqrt{2}$보다 크므로 최솟값이 아니다. 틀린 값 $\sqrt{3}$ → 올바른 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

NoteBase

오답 포인트

경계 직선의 기울기만 보고 접선의 절편 부호를 잘못 정하면 ②를 고르기 쉽다. 또한 포함되는 아무 값이 아니라 가능한 m 가운데 최솟값을 묻고 있으므로 ④도 오답이다.

다시 나오면 이렇게 판단

한 영역이 $L(x, y) \le m$인 반평면에 포함되는 문제에서는 주어진 영역에서 $L(x, y)$의 최댓값을 구한다.
단위원에서 $ax + by$의 최댓값은 $\sqrt{a^2 + b^2}$이다.

암기 포인트

단위원에서 $ax + by$의 최댓값은 계수벡터의 길이 $\sqrt{a^2 + b^2}$이다.

문 11. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-6}{x^2-4}=b$**를 만족시키는 두 상수** a, b**에 대하여** $a+b$**의 값은?**

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{5}{4}$
③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{13}{4}$

정답 3번

출제 포인트

분모가 0으로 가는 유리함수의 극한이 유한한 값이 되기 위한 조건을 이용해 a를 구하고, 인수분해와 약분으로 b를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-6}{x^2-4}=b$이고 b는 상수이다.
구해야 할 값: $a+b$이다.
주의할 조건: $x\to 2$일 때 분모 x^2-4가 0이므로 극한이 유한하려면 분자도 0이 되어 공통인수 $x-2$가 약분되어야 한다.

사용할 공식

분모가 0으로 갈 때 유한한 극한값을 가지려면 이 문항에서는 분자도 0이 되어야 한다. 따라서 $4+2a-6=0$을 적용한다. 이후 분자와 분모를 인수분해하여 공통인수 $x-2$를 약분한 뒤 극한값을 구한다.

계산 과정

1. $x=2$일 때 분자가 0이어야 하므로 $4+2a-6=0$이다. 따라서 $2a-2=0$에서 $a=1$이다.
2. $a=1$을 대입하면 $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$이고, $x^2-4=(x-2)(x+2)$이다.
3. $x\neq 2$에서 공통인수 $x-2$를 약분하면 $\frac{x+3}{x+2}$이므로 b=_x→2(x+3)/(x+2)=54이다.
4. 따라서 a+b=1+54=94이다.

선지 판단

① X — $a+b$의 계산값은 94이므로 14은 틀리다. 올바른 값은 94이다.
② X — 54은 $a+b$가 아니라 약분 후 구한 극한값 b이다. 올바른 $a+b$의 값은 94이다.
③ O — $a=1$, b=54이므로 a+b=94이다.
④ X — $a+b$의 계산값은 94이므로 $\frac{13}{4}$은 틀리다. 올바른 값은 94이다.

NoteBase

오답 포인트

②의 54은 극한값 b만 구한 뒤 문제에서 요구한 $a+b$를 계산하지 않을 때 고르기 쉽다. 먼저 유한한 극한의 조건으로 a를 정하고, 마지막에 a와 b를 더해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

분모가 0으로 가는 유리함수의 극한이 유한하다고 주어지면 먼저 분자도 0이 되는 조건을 세운다. 그 조건으로 미지수를 구한 뒤 공통인수를 약분하여 극한값을 계산하고, 문제에서 최종적으로 요구한 식까지 확인한다.

암기 포인트

유한한 00형 극한은 분자와 분모의 공통인수를 만든 뒤 약분하여 계산한다.

NoteBase

문 12. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x+f'(1)$을 만족시킬 때 $f(1)$의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 함수식에 포함된 $f'(1)$을 미분으로 먼저 구한 뒤 $f(1)$을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식은 $f(x)=x^2+2x+f'(1)$이다. $f'(1)$은 x와 무관한 상수이며, 구해야 할 값은 $f(1)$이다.

사용할 공식

$\frac{d}{dx}x^2=2x, \qquad \frac{d}{dx}(2x)=2$
양변을 x에 관하여 미분하면 상수 $f'(1)$의 미분값은 0이므로 $f'(x)=2x+2$가 된다.

계산 과정

1. $f'(x)=2x+2$이다.
2. $f'(1)=2\cdot1+2=4$이다.
3. 원래 식에 $x=1$과 $f'(1)=4$를 대입하면 $f(1)=1^2+2\cdot1+4=7$이다.

선지 판단

① X — 계산 결과는 7이므로 6은 틀리다. 올바르게는 $f(1)=7$이다.
② O — $f'(1)=4$를 원래 식에 대입하면 $f(1)=7$이므로 맞다.
③ X — 계산 결과는 7이므로 8은 틀리다. 올바르게는 $f(1)=7$이다.
④ X — 계산 결과는 7이므로 9는 틀리다. 올바르게는 $f(1)=7$이다.

오답 포인트

$f'(1)$을 아직 모르는 값이라고 그대로 두거나, $f'(1)$을 x의 함수처럼 미분하는 것이 함정이다. $f'(1)$은 특정한 수이므로 상수로 처리한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

함수식에 $f'(a)$ 같은 미지의 상수가 들어 있으면 먼저 주어진 식을 미분하여 그 값을 구하고, 그다음 원래 식에 대입한다.

암기 포인트

$f'(a)$는 a가 정해진 순간 하나의 상수이다.

NoteBase

문 13. 곡선 $y = 2x^3 - 3x + 3$ 위의 점 $(1, 2)$에서 접선의 기울기의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

출제 포인트

곡선 위 한 점에서의 접선의 기울기가 그 점의 x좌표에서 계산한 미분계수임을 이용하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x) = 2x^3 - 3x + 3$이고, 접점은 $(1, 2)$이다. 구해야 할 값은 $x = 1$에서의 접선의 기울기 $f'(1)$이다.

사용할 공식

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서 접선의 기울기는 $f'(a)$이다. 따라서 $f(x)$를 미분한 뒤 $x = 1$을 대입한다.

계산 과정

$f'(x) = 6x^2 - 3$
따라서
$f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 3$
이므로 접선의 기울기는 3이다.

선지 판단

① X — 1은 $f'(1) = 3$과 일치하지 않는다. 틀린 값 1은 올바르게는 3이다.
② X — 2는 접점의 y좌표이지 접선의 기울기가 아니다. 틀린 값 2는 올바르게는 3이다.
③ O — $f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 3$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — 4는 $f'(1) = 3$과 일치하지 않는다. 틀린 값 4는 올바르게는 3이다.

오답 포인트

접점 $(1, 2)$의 좌표값 자체를 기울기로 고르는 것이 함정이다. 특히 ②의 2는 함수값 $f(1)$이며, 접선의 기울기는 미분한 뒤 구한 $f'(1)$이다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

곡선 위 특정 점에서 접선의 기울기를 묻는 문제는 함수를 미분하고, 접점의 x좌표를 도함수에 대입하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

접선의 기울기 = 접점의 x좌표에서의 미분계수 $f'(a)$이다.

NoteBase

문 14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가
$v(t) = 8 - 2t^2$
이다. 점 P가 $t = 0$일 때 출발한다면, 출발 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 순간의 가속도의 값은?

① -6

② -7

③ -8

④ -9

정답 3번

출제 포인트

이 문제는 운동 방향이 바뀌는 시각을 속도 $v(t) = 0$에서 찾고, 가속도 $a(t) = v'(t)$에 그 시각을 대입하는 문제이다.

조건 정리

주어진 속도는 $v(t) = 8 - 2t^2$이다. 출발 후이므로 $t > 0$인 시각만 고려한다. 운동 방향은 속도의 부호가 바뀔 때 바뀌므로 먼저 $v(t) = 0$을 만족하는 양의 시각을 구해야 한다.

사용할 공식

운동 방향이 바뀌는 시각: $v(t) = 0$이면서 그 전후로 속도의 부호가 바뀌는 시각
가속도: $a(t) = v'(t)$

속도의 부호가 운동 방향을 나타내고, 가속도는 속도의 시간에 대한 미분이므로 이 두 관계를 사용한다.

계산 과정

1. $8 - 2t^2 = 0$에서 $t^2 = 4$이므로 $t = \pm 2$이다. 출발 후의 시각은 $t = 2$이다.
2. $0 < t < 2$에서는 $v(t) > 0$, $t > 2$에서는 $v(t) < 0$이므로 $t = 2$에서 운동 방향이 실제로 바뀐다.
3. $a(t) = v'(t) = -4t$이므로 $a(2) = -4 \times 2 = -8$이다.

선지 판단

① X — 제시된 -6은 $a(2) = -4 \times 2$와 일치하지 않는다. 올바른 가속도는 -8이다.
② X — 제시된 -7은 $a(2) = -4 \times 2$와 일치하지 않는다. 올바른 가속도는 -8이다.
③ O — 방향이 바뀌는 시각 $t = 2$를 $a(t) = -4t$에 대입하면 -8이 된다.
④ X — 제시된 -9는 $a(2) = -4 \times 2$와 일치하지 않는다. 올바른 가속도는 -8이다.

NoteBase

오답 포인트

$v(2)=0$을 구한 뒤 그 값을 답으로 삼거나, $t=2$를 원래 속도식에 다시 대입하면 가속도를 구할 수 없다. 속도가 0이 되는 시각을 찾은 다음 속도식을 미분한 $a(t)=-4t$에 대입해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

운동 방향 변화 문제는 $v(t)=0$인 시각 후보를 찾고, 속도의 부호 변화 여부를 확인한 뒤, 그 시각을 $a(t)=v'(t)$에 대입하는 순서로 판단한다.

암기 포인트

방향 변화는 속도의 부호 변화이고, 가속도는 속도의 미분이다.

NoteBase

문 15. 정적분 $\int_{-1}^{1}|x^2-x|dx$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 1번

출제 포인트

절댓값 안의 식이 부호를 바꾸는 지점을 찾아 구간을 나눈 뒤 정적분을 계산하는 문제이다.

조건 정리

적분 구간은 $[-1, 1]$이고, 절댓값 안의 식은 $x^2-x=x(x-1)$이다. 영점은 $x=0, 1$이며, 주어진 구간에서 $[-1, 0]$에서는 $x^2-x\geq 0$, $[0, 1]$에서는 $x^2-x\leq 0$이다. 따라서 $x=0$을 기준으로 적분을 나눈다.

사용할 공식

|x^2-x|=casesx^2-x&(-1≤ x≤ 0),\ x-x^2&(0≤ x≤ 1).cases
절댓값은 안의 식이 음수인 구간에서 부호를 반대로 바꾸므로 이 식을 사용한다.

계산 과정

aligned ∫ _-1^1|x^2-x| dx&= ∫ _-1^0(x^2-x) dx+ ∫ _0^1(x-x^2) dx\\&=≤ft[(x^3)/(3)-(x^2)/(2)]_-1^0+≤ft[(x^2)/(2)-(x^3)/(3)]_0^1\\&=(5)/(6)+(1)/(6)=1.aligned

선지 판단

① O — 계산 결과가 1이므로 옳다.
② X — 값 2는 계산 결과 1과 일치하지 않는다. 틀린 값 2를 올바르게 고치면 1이다.
③ X — 값 3은 계산 결과 1과 일치하지 않는다. 틀린 값 3을 올바르게 고치면 1이다.
④ X — 값 4는 계산 결과 1과 일치하지 않는다. 틀린 값 4를 올바르게 고치면 1이다.

오답 포인트

x^2-x는 전체 구간에서 같은 부호가 아니다. $[0, 1]$에서만 음수이므로 이 구간의 식에만 음수를 붙여 $x-x^2$로 바꾸어야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값 정적분은 절댓값 안의 식의 영점을 찾고, 각 구간의 부호를 확인한 뒤, 음수인 구간의 식만 부호를 바꾸어 적분한다.

암기 포인트

절댓값 적분은 '영점 찾기 → 구간별 부호 확인 → 음수 구간 부호 반전'의 순서로 계산한다.

NoteBase

문 16. 함수 $f(x)=x^3+2x$에 대하여
$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t+1)dt$
의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 적분으로 정의된 분자의 미분과 로피탈의 정리를 이용하여 0/0 꼴의 극한을 구하는 문제이다.

조건 정리

$x\to 1$일 때 분자는 $\int_1^1 f(t+1)dt=0$, 분모는 $1^2-1=0$이므로 극한은 0/0 꼴이다. 또한 미적분학의 기본정리에 따라 $\frac{d}{dx}\int_1^x f(t+1)dt=f(x+1)$이다.

사용할 공식

$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}$
분자와 분모가 모두 0으로 수렴하고 두 함수가 극한값 근방에서 미분 가능하므로 로피탈의 정리를 적용할 수 있다.

계산 과정

분자와 분모를 각각 미분하면
$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t+1)dt=\lim_{x\to 1}\frac{f(x+1)}{2x}.$
여기에 $x=1$을 대입하면
$\frac{f(2)}{2}=\frac{2^3+2\cdot 2}{2}=\frac{12}{2}=6.$

선지 판단

① O — 계산 결과가 6이므로 옳다.
② X — 7은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 7이 아니라 올바른 값은 6이다.
③ X — 8은 계산 결과와 다르다. 틀린 값 8이 아니라 올바른 값은 6이다.
④ X — 9는 계산 결과와 다르다. 틀린 값 9가 아니라 올바른 값은 6이다.

NoteBase

오답 포인트

분자를 미분할 때 적분함수 $f(t+1)$의 상한 $t=x$를 대입하여 $f(x+1)$을 얻는 점이 핵심이다. 이를 $f(x)$로 잘못 쓰거나, 분모의 미분 $2x$를 빠뜨리면 오답이 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

적분이 포함된 극한에서는 먼저 대입하여 부정형인지 확인하고, 적분의 상한이 변수이면 미적분학의 기본정리로 분자를 미분한 뒤 로피탈의 정리를 적용한다.

암기 포인트

$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)dt = g(x)$이며, 이 문제에서는 $g(t)=f(t+1)$이므로 미분 결과가 $f(x+1)$이다.

NoteBase

문 17. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시킨다.
$\int_{-3}^{1} xf(x)dx=4$
일 때, $\int_{1}^{3} xf(x)dx$의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

정답 4번

출제 포인트

짝함수 $f(x)$에 x를 곱하면 홀함수가 된다는 성질을 이용하여 정적분의 부호를 판단하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이고, $\int_{-3}^{1} xf(x)dx=4$이다. 구해야 할 값은 $\int_{1}^{3} xf(x)dx$이다.

사용할 공식

$g(x)=xf(x)$라 두면

$g(-x)=(-x)f(-x)=(-x)f(x)=-g(x)$

이므로 $g(x)$는 홀함수이다. 따라서 대칭구간에서

$\int_{-a}^{a} g(x)dx=0$

이고, 구간을 원점에 대하여 대칭이동하면

$\int_{-3}^{-1} g(x)dx=-\int_{1}^{3} g(x)dx$

가 성립한다.

계산 과정

홀함수 $g(x)=xf(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{1} g(x)dx=0$이다. 그러므로

$4=\int_{-3}^{1} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx+\int_{-1}^{1} g(x)dx=\int_{-3}^{-1} g(x)dx$

이다. 대칭구간의 부호 관계를 적용하면

$\int_{1}^{3} xf(x)dx=-\int_{-3}^{-1} xf(x)dx=-4$

이다.

NoteBase

선지 판단

① X — -1은 계산 결과 -4와 다르다. 틀린 값 -1 → 올바르게는 -4이다.
② X — -2는 계산 결과 -4와 다르다. 틀린 값 -2 → 올바르게는 -4이다.
③ X — -3은 계산 결과 -4와 다르다. 틀린 값 -3 → 올바르게는 -4이다.
④ O — 홀함수의 대칭구간 적분은 크기가 같고 부호가 반대이므로 구하는 값은 -4이다.

오답 포인트

$f(x)$가 짝함수라는 사실만 보고 적분값의 부호도 같다고 판단하기 쉽다. 그러나 적분함수는 $f(x)$가 아니라 $xf(x)$이며, 짝함수와 홀함수의 곱인 $xf(x)$는 홀함수이므로 좌우 대칭구간의 적분값은 부호가 반대이다.

다시 나오면 이렇게 판단

먼저 실제 피적분함수의 대칭성을 확인한다. 짝함수에 x를 곱한 함수는 홀함수이므로 원점 대칭구간의 적분은 0이고, 서로 대칭인 두 구간의 적분은 절댓값이 같고 부호가 반대이다.

암기 포인트

짝함수 f에 x를 곱하면 $xf(x)$는 홀함수이다. 홀함수의 좌우 대칭구간 적분은 서로 부호가 반대이다.

NoteBase

문 18. $(1+x^3)^{10}$의 전개식에서 x^9의 계수는?

① 120

② 130

③ 140

④ 150

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 이항정리의 일반항을 이용해 특정 차수인 x^9의 계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $(1+x^3)^{10}$
구해야 할 값: x^9의 계수
주의할 조건: x^3을 k번 선택한 항의 차수는 $3k$이므로, $3k=9$를 만족하는 k를 먼저 구한다.

사용할 공식

이항정리에 따라
$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$
이다. 여기서 $a=1, b=x^3, n=10$이므로 일반항은 $\binom{10}{k}x^{3k}$이다. 각 항에서 x^3을 선택하는 횟수에 따라 차수와 계수가 결정되므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

1. $x^{3k}=x^9$이므로 $3k=9$, 즉 $k=3$이다.
2. 따라서 x^9의 계수는 $\binom{10}{3}$이다.
3. $\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$이다.

선지 판단

① O — 계산한 계수 $\binom{10}{3}=120$과 일치한다.
② X — 130은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 130은 올바르게는 120이다.
③ X — 140은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 140은 올바르게는 120이다.
④ X — 150은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 150은 올바르게는 120이다.

NoteBase

오답 포인트

지수 9를 곧바로 조합의 선택 횟수로 사용하면 안 된다. 한 번 선택할 때마다 x가 아니라 x^3이 곱해지므로 $3k = 9$에서 $k = 3$을 구한 뒤 $\binom{10}{3}$을 계산해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

$(a + x^m)^n$에서 x^r의 계수를 묻는 경우 먼저 $mk = r$을 풀어 선택 횟수 k를 정하고, 그다음 해당 이항계수와 상수항의 거듭제곱을 계산한다.

암기 포인트

특정 차수의 계수는 '지수로 선택 횟수 결정 → 이항계수 계산'의 순서로 구한다.

NoteBase

문 19. 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수가
$f(x) = x^2 + a \quad (0 \le x \le 1)$
로 주어졌을 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{9}$
② $\frac{2}{9}$
③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$

정답 4번

출제 포인트

확률밀도함수는 정의된 구간 전체에서 적분한 값이 1이어야 한다는 성질을 이용해 상수 a를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(x) = x^2 + a, 0 \le x \le 1$
구해야 할 값: 상수 a
주의할 조건: 확률밀도함수이므로 $\int_0^1 f(x)dx = 1$이고, 구간에서 $f(x) \ge 0$이어야 한다.

사용할 공식

확률밀도함수의 정규화 조건은
$\int_0^1 f(x)dx = 1$
이다. 연속확률변수가 $[0, 1]$에서 어떤 값을 가질 전체 확률이 1이므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

$\int_0^1 (x^2 + a)dx = \left[\frac{x^3}{3} + ax\right]_0^1 = \frac{1}{3} + a$
확률밀도함수의 전체 적분값이 1이므로
$\frac{1}{3} + a = 1$
이다. 따라서
$a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
이다. 또한 $f(x) = x^2 + \frac{2}{3} > 0$이므로 비음수 조건도 만족한다.

NoteBase

선지 판단

① X — $a=\frac{1}{9}$이면 전체 적분값은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$로 1이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{9}$ → 올바르게는 $\frac{2}{3}$이다.
② X — $a=\frac{2}{9}$이면 전체 적분값은 $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$로 1이 아니다. 틀린 값 $\frac{2}{9}$ → 올바르게는 $\frac{2}{3}$이다.
③ X — $a=\frac{1}{3}$이면 전체 적분값은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$로 1이 아니다. 틀린 값 $\frac{1}{3}$ → 올바르게는 $\frac{2}{3}$이다.
④ O — $a=\frac{2}{3}$이면 전체 적분값은 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$이고 함수도 구간 전체에서 음수가 아니므로 확률밀도함수의 조건을 만족한다.

오답 포인트

$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$만 계산하고 이를 곧바로 a로 고르는 실수를 주의한다. a는 상수이므로 $\int_0^1 adx=a$이며, 두 적분값의 합을 1로 맞춰야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

확률밀도함수의 미지수는 먼저 전체 구간 적분을 1로 두어 구하고, 마지막에 함수가 구간 전체에서 음수가 아닌지도 확인한다.

암기 포인트

확률밀도함수의 두 조건은 '전체 적분은 1, 함수값은 0 이상'이다.

NoteBase

문 20. 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 두 눈의 합이 4 이상이 될 확률은?

① $\frac{1}{4}$
② $\frac{5}{12}$
③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{11}{12}$

정답 4번

출제 포인트

서로 다른 두 주사위를 던질 때 전체 경우의 수를 구하고, 여사건을 이용하여 두 눈의 합이 4 이상일 확률을 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: 서로 다른 두 주사위의 눈은 각각 1부터 6까지이다.
구해야 할 값: 두 눈의 합이 4 이상일 확률이다.
주의할 조건: 두 주사위는 구별되므로 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$가지이며, 합이 4 이상인 경우를 직접 세는 대신 그 여사건인 합이 4 미만인 경우를 센다.

사용할 공식

$P(A) = 1 - P(A^c)$
이 공식을 쓰는 이유: 합이 4 미만인 경우는 합이 2 또는 3인 경우뿐이어서, 합이 4 이상인 경우를 직접 세는 것보다 여사건을 세는 편이 간단하기 때문이다.

계산 과정

1. 전체 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$가지이다.
2. 합이 2인 경우는 $(1, 1)$의 1가지이고, 합이 3인 경우는 $(1, 2)$, $(2, 1)$의 2가지이다.
3. 합이 4 미만인 경우는 모두 3가지이므로 확률은 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$이다.
4. 따라서 합이 4 이상일 확률은 $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$이다.

선지 판단

① X — $\frac{1}{4}$은 계산 결과 $\frac{11}{12}$와 다르다. 틀린 값 $\frac{1}{4}$ → 올바르게는 $\frac{11}{12}$이다.
② X — $\frac{5}{12}$는 합이 4 미만인 3가지를 제외하여 얻는 확률이 아니다. 틀린 값 $\frac{5}{12}$ → 올바르게는 $\frac{11}{12}$이다.
③ X — $\frac{2}{3}$는 전체 36가지 중 합이 4 미만인 3가지만 제외한 비율과 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{2}{3}$ → 올바르게는 $\frac{11}{12}$이다.
④ O — 전체 36가지에서 합이 2 또는 3인 3가지를 제외하면 33가지이므로 확률은 $\frac{33}{36} = \frac{11}{12}$이다.

NoteBase

오답 포인트

‘합이 4 이상’에서 4를 포함한다는 점과 두 주사위가 서로 달라 $(1, 2)$와 $(2, 1)$을 서로 다른 경우로 센다는 점이 핵심 함정이다. 또한 구하려는 사건이 아니라 합이 4 미만인 사건의 확률 $\frac{1}{12}$을 구한 뒤에는 반드시 1에서 빼야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

‘이상’이나 ‘이하’ 범위의 경우가 많을 때는 반대 범위인 여사건의 경우를 먼저 센다. 서로 다른 두 주사위는 순서쌍으로 구별하여 전체 36가지를 기준으로 확률을 계산한다.

암기 포인트

구하려는 경우가 많고 반대 경우가 적으면 여사건을 사용한다: $P(A) = 1 - P(A^c)$.

NoteBase