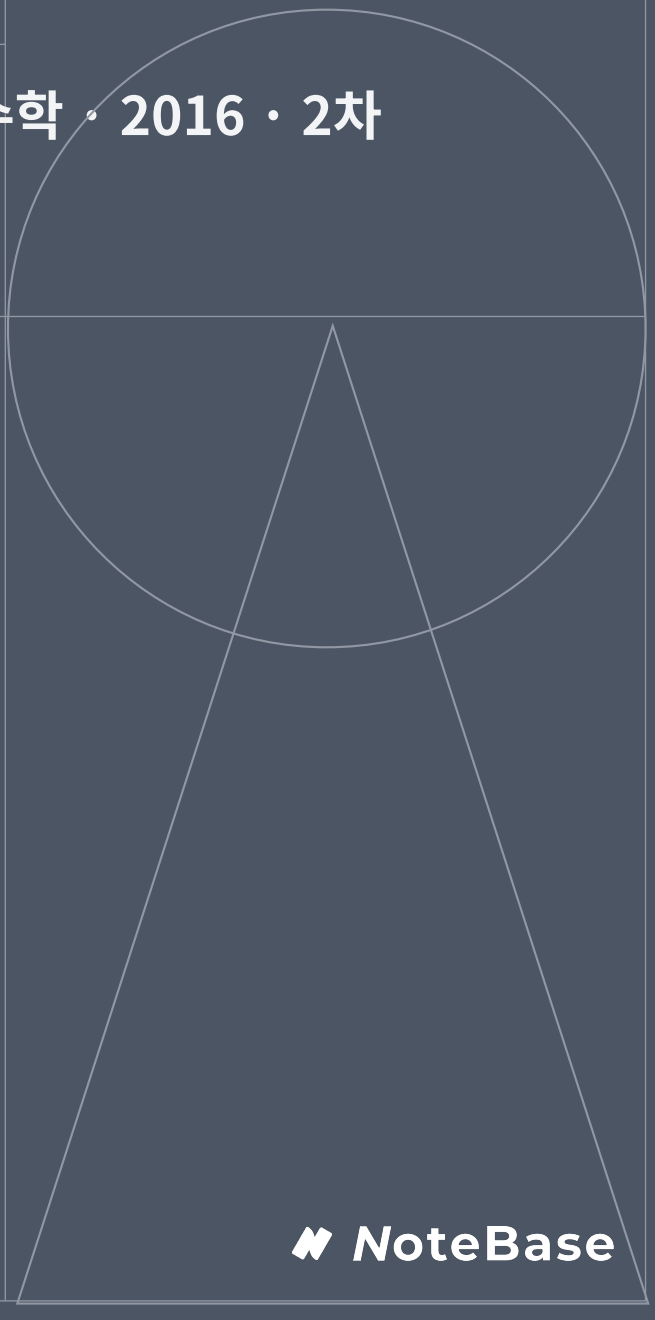
# 기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2016 · 2차



NoteBase

# 기출OX 해설집

## 공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2016 · 2차

**공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2016 · 2차**

**문 1. 방정식 $x^2-\sqrt{7}x+1=0$을 만족하는 실수 $x$에 대하여, $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값은?**

① 5

② 7

③ 9

④ 11

**정답 1번**

**출제 포인트**

주어진 이차방정식을 이용해 $x+\frac{1}{x}$를 구한 뒤 완전제곱식으로 $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값을 계산하는 문제이다.

**조건 정리**

주어진 식은 $x^2-\sqrt{7}x+1=0$이다. 상수항이 1이므로 $x=0$은 해가 아니며, 양변을 $x$로 나눌 수 있다. 구해야 할 값은 $x^2+\frac{1}{x^2}$이다.

**사용할 공식**

$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$
따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}$는 $x+\frac{1}{x}$를 먼저 구한 뒤 그 제곱에서 2를 빼면 얻어진다.

**계산 과정**

$x^2-\sqrt{7}x+1=0$의 양변을 $x$로 나누면
$x-\sqrt{7}+\frac{1}{x}=0$
이므로
$x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$
이다. 양변을 제곱하면
$x^2+2+\frac{1}{x^2}=7$
이므로
$x^2+\frac{1}{x^2}=7-2=5$
이다.

NoteBase

### 선지 판단

① O — 계산 결과가 5이므로 옳다.
② X — 7은 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$을 제곱한 값일 뿐이다. 가운데 항 2를 빼야 하므로 올바른 값은 5이다.
③ X — 선지의 9는 계산 결과와 일치하지 않는다. $x^2+\frac{1}{x^2}=7-2$이므로 올바른 값은 5이다.
④ X — 선지의 11은 계산 결과와 일치하지 않는다. 완전제곱식의 가운데 항은 2이므로 올바른 값은 5이다.

### 오답 포인트

가장 큰 함정은 $x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}$을 제곱해 얻은 7을 곧바로 답으로 고르는 것이다. $(x+\frac{1}{x})^2$에는 목표식 외에 가운데 항 2가 포함되므로 반드시 2를 빼야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

상수항이 있는 이차방정식에서 $x^2+\frac{1}{x^2}$를 물으면 먼저 $x\neq 0$을 확인하고 방정식을 $x$로 나눈다. 이어서 $x+\frac{1}{x}$의 값을 구하고 완전제곱식에서 2를 빼는 순서로 계산한다.

### 암기 포인트

$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2$이다.

NoteBase

**문 2.** $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2016}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}$**을 간단히 하면? (단,** $i=\sqrt{-1}$**)**

① 0

② 1

③ 2

④ 3

**정답 3번**

### 출제 포인트

이 문제는 복소수의 나눗셈을 정리한 뒤 $i$의 거듭제곱이 4를 주기로 반복된다는 성질을 이용해 식의 값을 구하는 문제이다.

### 조건 정리

주어진 식은 서로 역수 관계인 두 복소수의 2016제곱의 합이다. $i^2=-1$이고, 2016은 4의 배수라는 점을 이용한다.

### 사용할 공식

복소수의 분모를 실수로 만들기 위해 분모의 켤레복소수를 분자와 분모에 곱한다. 또한 $i^{4k}=1$이고 $(-i)^{4k}=1$이다. 두 분수를 각각 $-i$와 $i$로 바꿀 수 있으므로 이 성질을 사용한다.

### 계산 과정

먼저 두 분수를 정리한다.

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

2016은 $4\times504$이므로

$(-i)^{2016}+i^{2016}=((-i)^4)^{504}+(i^4)^{504}=1+1=2$

따라서 식의 값은 2이다.

### 선지별 해설

① X — 0은 계산 결과 2와 다르다. 두 항을 서로 반대인 값으로 보고 상쇄된다고 판단한 것이 잘못이며, 올바르게는 두 항이 모두 1이 되어 합은 2이다.

② X — 1은 계산 결과 2와 다르다. 두 항 가운데 하나만 계산한 값에 해당하며, 올바르게는 두 항의 값 1과 1을 모두 더해 2가 된다.

③ O — $(-i)^{2016}=1$, $i^{2016}=1$이므로 합은 2이다.

④ X — 3은 계산 결과 2와 다르다. 올바르게는 각 항이 1이므로 합은 2이다.

NoteBase

**오답 포인트**

두 분수가 역수 관계라는 이유만으로 합이 0이 된다고 판단하면 안 된다. 각각을 먼저 $-i$와 $i$로 정리하고, 지수 2016을 4로 나눈 나머지가 0임을 확인해야 한다.

**다시 나오면 이렇게 판단**

복소수 분수의 거듭제곱은 켤레복소수로 분모를 실수화한 뒤, 밑을 $i$, $-i$ 같은 단순한 형태로 바꾸고 지수를 4로 나눈 나머지로 값을 판단한다.

**암기 포인트**

$i$의 거듭제곱은 $i,\ -1,\ -i$, 1의 순서로 4마다 반복하며, 4의 배수 제곱은 1이다.

NoteBase

**문 3. 이차함수 $y = x^2 - x + k$의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$일 때, 상수 $k$의 값은?**

① $-7$

② $-5$

③ $-3$

④ $-1$

**정답 4번**

### 출제 포인트

이차방정식의 두 근 사이의 거리를 근과 계수의 관계 또는 판별식으로 나타내어 상수 $k$를 구하는 문제이다.

### 조건 정리

그래프와 $x$축의 두 교점의 $x$좌표를 $\alpha, \beta$라 하면 두 점은 같은 $x$축 위에 있으므로 거리는 $|\alpha - \beta|$이다. 주어진 거리는 $\sqrt{5}$이다.

### 사용할 공식

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근 사이의 거리는
$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$
이다. 두 교점의 $x$좌표가 방정식 $x^2 - x + k = 0$의 두 실근이므로 이 공식을 사용한다.

### 계산 과정

$a = 1, b = -1, c = k$이므로
$|\alpha - \beta| = \sqrt{(-1)^2 - 4k} = \sqrt{1 - 4k}$
이다. 문제의 조건을 대입하면
$\sqrt{1 - 4k} = \sqrt{5}$
이고, 양변을 제곱하여
$1 - 4k = 5, \qquad k = -1$
을 얻는다.

### 선지 판단

① X — $k = -7$이면 두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{1 - 4(-7)} = \sqrt{29}$이므로 $\sqrt{5}$가 아니다. 틀린 값 $-7$은 올바르게는 $-1$이다.
② X — $k = -5$이면 두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{21}$이므로 조건과 다르다. 틀린 값 $-5$는 올바르게는 $-1$이다.
③ X — $k = -3$이면 두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{13}$이므로 조건과 다르다. 틀린 값 $-3$은 올바르게는 $-1$이다.
④ O — $k = -1$이면 두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{1 - 4(-1)} = \sqrt{5}$가 되어 주어진 조건을 만족한다.

NoteBase

**오답 포인트**

두 점 사이의 거리를 두 근의 합이나 곱으로 착각하면 안 된다. 또한 $b=-1$이므로 판별식에서 $b^2=(-1)^2=1$이고, $-4ac=-4k$라는 부호를 정확히 처리해야 한다.

**다시 나오면 이렇게 판단**

이차함수의 그래프가 $x$축과 만나는 두 점 사이의 거리가 주어지면 두 교점의 $x$좌표를 두 근으로 보고 $|\alpha-\beta|=\sqrt{D}/|a|$에 연결한다. 그다음 거리 조건을 대입하고 부호를 검산한다.

**암기 포인트**

이차방정식 두 근의 거리: $|\alpha-\beta|=\sqrt{D}/|a|$.

NoteBase

**문 4.** $-1 \le x \le 1$**일 때,** $y = (x^2 - 2x + 1)^2 - 2(x^2 - 2x + 1) + 2$**의 최댓값** $\alpha$**와 최솟값** $\beta$**의 차** $\alpha - \beta$**를 구하면?**

① 8

② 9

③ 10

④ 11

**정답 2번**

**출제 포인트**

이 문제는 식의 일부를 하나의 문자로 치환하고, 원래 변수의 범위에서 치환한 변수의 범위를 구한 뒤 이차식의 최댓값과 최솟값을 찾는 문제이다.

**조건 정리**

$t = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$로 놓는다. -1≤ x≤1이면 -2≤ x-1≤0이므로 0≤ t≤4이다. 구해야 할 값은 $y = t^2 - 2t + 2$의 최댓값 $\alpha$와 최솟값 $\beta$의 차 $\alpha - \beta$이다.

**사용할 공식**

완전제곱식을 이용하면
$y = t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1$
이다. 이 식을 쓰면 꼭짓점 $t = 1$에서 최솟값을 확인할 수 있고, 최댓값은 닫힌구간 0≤ t≤4의 양 끝값을 비교하여 구할 수 있다.

**계산 과정**

1. $t = 1$은 범위 0≤ t≤4에 포함되므로 $\beta = (1 - 1)^2 + 1 = 1$이다. 이때 $(x - 1)^2 = 1$이고 주어진 범위에서는 $x = 0$이다.
2. 양 끝값은 $y(0) = 2, y(4) = 10$이므로 $\alpha = 10$이다. 이때 $(x - 1)^2 = 4$이고 주어진 범위에서는 $x = -1$이다.
3. 따라서 $\alpha - \beta = 10 - 1 = 9$이다.

NoteBase

### 선지 판단

① X — 8은 최솟값을 2로 본 값이다. 그러나 $t = 1$, 즉 $x = 0$에서 최솟값은 1이므로 올바른 차는 9이다.
② O — 계산 결과 $\alpha - \beta = 10 - 1 = 9$이므로 옳다.
③ X — 10은 최댓값 $\alpha$ 자체이며 최댓값과 최솟값의 차가 아니다. 올바른 차는 $10 - 1 = 9$이다.
④ X — 11은 최댓값 10에서 정의역의 하한 $-1$을 빼면 나오는 값으로, $x$의 범위와 $y$의 최솟값을 혼동한 것이다. 올바르게는 $y$의 최솟값 1을 빼서 9가 된다.

### 오답 포인트

양 끝점 $x = -1, 1$에서의 함수값만 비교하면 최솟값을 2로 잘못 판단하여 ①의 8을 고르게 된다. 치환 뒤에는 $t$의 전체 범위에서 꼭짓점 $t = 1$이 포함되는지 반드시 확인해야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

반복되는 식을 치환한 뒤에는 원래 변수의 범위로부터 치환변수의 정확한 범위를 먼저 구한다. 이어서 완전제곱식의 꼭짓점과 치환변수 구간의 양 끝값을 모두 비교하여 최댓값과 최솟값을 결정한다.

### 암기 포인트

합성된 이차식의 최댓값·최솟값은 '치환변수의 범위 → 꼭짓점 → 양 끝값'의 순서로 판단한다.

NoteBase

**문 5. 이차부등식 $-x^2-2(m-1)x+(m-3)>0$을 만족하는 실수 $x$가 존재하지 않을 때, 실수 $m$의 값의 범위는?**

① $-2 \le m \le 1$

② $-1 \le m \le 2$

③ $0 \le m \le 2$

④ $2 \le m \le 3$

**정답 2번**

### 출제 포인트

아래로 열린 이차함수의 값이 모든 실수에서 0 이하가 되도록 하는 매개변수 $m$의 범위를 구하는 문제이다.

### 조건 정리

주어진 이차함수를 $f(x)=-x^2-2(m-1)x+(m-3)$이라 둔다. 이차항의 계수가 음수이므로 그래프는 아래로 열린다. 따라서 $f(x)>0$인 실수 $x$가 존재하지 않으려면 $f(x)$의 최댓값이 0 이하이어야 한다. 등호인 경우에도 부등식이 $f(x)>0$인 엄격한 부등식이므로 해가 없다.

### 사용할 공식

완전제곱식을 이용하면
$f(x)=-(x+m-1)^2+(m-1)^2+m-3=-(x+m-1)^2+(m-2)(m+1)$
이다. $-(x+m-1)^2$의 최댓값은 0이므로 $f(x)$의 최댓값은 $(m-2)(m+1)$이다.

### 계산 과정

해가 존재하지 않을 조건은
$(m-2)(m+1) \le 0$
이다. 두 경계값은 $m=-1, m=2$이고, 곱이 0 이하인 구간은 두 값 사이이므로
$-1 \le m \le 2$
이다.

NoteBase

### 선지 판단

① X — $-2 \le m \le 1$은 $-2 \le m < -1$처럼 최댓값이 양수인 범위를 포함하고, 1<m≤2처럼 해가 없는 범위를 제외한다. 틀린 범위이며, 올바르게는 -1≤ m≤2이다.
② O — 계산한 범위 -1≤ m≤2와 정확히 일치한다. 두 끝점에서는 최댓값이 0이어서 $f(x) > 0$을 만족하는 실수 $x$가 없다.
③ X — 0≤ m≤2는 실제 범위 중 $-1 \le m < 0$을 빠뜨린다. 틀린 범위이며, 올바르게는 -1≤ m≤2이다.
④ X — 2≤ m≤3에서 $m = 2$만 조건을 만족하고, $m > 2$이면 최댓값이 양수가 되어 해가 존재한다. 틀린 범위이며, 올바르게는 -1≤ m≤2이다.

### 오답 포인트

‘실수해가 존재하지 않는다’를 판별식만 암기해 처리하면 엄격한 부등식의 경계값을 놓치기 쉽다. 이 문제에서는 최댓값이 음수일 때뿐 아니라 0일 때도 $f(x) > 0$인 해가 없으므로 $m = -1$과 $m = 2$를 모두 포함한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

아래로 열린 이차식에 대해 $f(x) > 0$의 해가 없다는 조건은 그래프의 최댓값이 0 이하라는 뜻으로 바꾼다.
완전제곱으로 최댓값을 구한 뒤 매개변수 부등식을 풀고, 원래 부등호가 엄격한지 확인하여 경계의 포함 여부를 결정한다.

### 암기 포인트

아래로 열린 이차함수에서 $f(x) > 0$의 해가 없음은 $f(x)$의 최댓값이 0 이하인 경우이다.

NoteBase

**문 6. 방정식 $5x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 1 = 0$을 만족하는 실수 $x, y$에 대하여, $x + y$의 값은?**

① $-1$

② $2$

③ $-3$

④ $4$

**정답 3번**

**출제 포인트**

이 문제는 이차식을 두 제곱의 합으로 변형하고, 실수의 제곱은 음수가 아니라는 성질을 이용해 $x + y$를 구하는 문제이다.

**조건 정리**

주어진 조건은 $5x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 1 = 0$이고, 구해야 할 값은 $x + y$이다. $x$와 $y$가 실수이므로 제곱한 값은 각각 0 이상이다.

**사용할 공식**

$5x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 1 = (2x - y)^2 + (x + 1)^2$
두 제곱의 합이 0이고 각 항이 0 이상이므로 두 제곱이 각각 0이어야 한다.

**계산 과정**

$(2x - y)^2 + (x + 1)^2 = 0$
따라서 $2x - y = 0, x + 1 = 0$이다. 두 번째 식에서 $x = -1$이고, 이를 첫 번째 식에 대입하면 $y = 2x = -2$이다. 그러므로 $x + y = -1 + (-2) = -3$이다.

**선지 판단**

① X — 선지의 $-1$은 $x$의 값일 뿐 $x + y$가 아니다. 올바른 값은 $x + y = -3$이다.
② X — 선지의 2는 $y = 2x$에서 계수 2를 결과로 잘못 본 값이다. 올바른 값은 $x + y = -3$이다.
③ O — 계산 결과 $x = -1, y = -2$이므로 $x + y = -3$이다.
④ X — 선지의 4는 주어진 식을 만족하는 $x + y$의 값이 아니다. 올바른 값은 $x + y = -3$이다.

**오답 포인트**

$(2x - y)^2 + (x + 1)^2 = 0$에서 제곱을 풀며 부호를 놓치거나, $x = -1$만 구한 뒤 이를 $x + y$로 착각하기 쉽다. $2x - y = 0$에서는 $y = 2x$이므로 $y = -2$이다.

NoteBase

**다시 나오면 이렇게 판단**

이차식에 교차항이 있으면 완전제곱식으로 묶는다. 실수인 두 식의 제곱의 합이 0이면 각 식이 모두 0이므로 연립하여 미지수를 구한다.

**암기 포인트**

실수에서 $A^2 + B^2 = 0$이면 $A = 0, B = 0$이다.

NoteBase

**문 7.** $\log x$**의 지표가 2일 때,** $\log x$**의 가수와** $\log\sqrt{x}$**의 가수가 같도록 하는 실수** $x$**의 값은?**

① $\sqrt{10}$
② 10
③ $10\sqrt{10}$
④ 100

**정답 4번**

**출제 포인트**

상용로그를 지표와 가수로 나누고, 제곱근의 로그를 $\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x$로 바꾸어 가수가 같아지는 $x$를 구하는 문제이다.

**조건 정리**

$\log x$의 지표가 2이므로 $\log x=2+m$으로 놓을 수 있으며, 가수 $m$은 $0\le m<1$이다. 따라서 $100\le x<1000$이다. 구해야 할 값은 $\log x$와 $\log\sqrt{x}$의 가수가 같은 $x$이다.

**사용할 공식**

$\log\sqrt{x}=\log x^{1/2}=\frac{1}{2}\log x$
제곱근은 $x^{1/2}$이므로 로그의 지수 법칙을 적용한다.

**계산 과정**

$\log x=2+m$으로 놓으면
$\log\sqrt{x}=\frac{2+m}{2}=1+\frac{m}{2}$
이다. $0\le m<1$이므로 $\log\sqrt{x}$의 가수는 $\frac{m}{2}$이다. 두 가수가 같다는 조건에서
$m=\frac{m}{2}\quad\Rightarrow\quad m=0$
을 얻는다. 따라서 $\log x=2$이고 $x=10^2=100$이다.

**선지 판단**

① X — $x=\sqrt{10}=10^{1/2}$이면 $\log x=\frac{1}{2}$이므로 지표가 2가 아니다. 올바르게는 조건을 만족하는 값이 $x=100$이다.
② X — $x=10$이면 $\log x=1$이므로 지표가 2가 아니다. 올바르게는 $\log x=2$가 되는 $x=100$이다.
③ X — $x=10\sqrt{10}=10^{3/2}$이면 $\log x=\frac{3}{2}$이므로 지표가 2가 아니다. 올바르게는 가수가 0인 $x=100$이다.
④ O — $x=100$이면 $\log x=2$의 가수는 0이고, $\log\sqrt{x}=\log 10=1$의 가수도 0이므로 모든 조건을 만족한다.

NoteBase

### 오답 포인트

지표가 2라는 조건만 보고 $x$를 임의로 고르거나, $\log\sqrt{x}$의 가수를 $m$으로 그대로 두는 것이 함정이다.
$\log x = 2 + m$ 전체를 절반으로 나누면 새 가수는 $\frac{m}{2}$가 된다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

지표가 주어진 상용로그 문제에서는 먼저 x=지표+m, $0 \le m < 1$로 놓고, 로그의 성질을 적용한 뒤 새 식의 정수 부분과 가수 부분을 다시 구분한다.

### 암기 포인트

$\log\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log x$이며, 가수 비교는 로그식을 변형한 뒤 정수 부분을 분리하여 판단한다.

NoteBase

**문 8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째 항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$이 $S_n = 3^{n+1} + k$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째 항부터 등비수열을 이루기 위한 상수 $k$의 값은?**

① $-3$

② $-2$

③ $-1$

④ $0$

**정답 1번**

**출제 포인트**

부분합에서 각 항을 구하는 관계와 첫째 항의 예외를 이용하여, 수열 $\{a_n\}$이 처음부터 등비수열이 되게 하는 상수 $k$를 구하는 문제이다.

**조건 정리**

주어진 값: $S_n = 3^{n+1} + k$이다.
구해야 할 값: 수열 $\{a_n\}$이 첫째 항부터 등비수열을 이루게 하는 $k$이다.
주의할 조건: $a_1 = S_1$이고, $n \geq 2$에서는 $a_n = S_n - S_{n-1}$이다. 첫째 항은 차로 구하지 않는다.

**사용할 공식**

$a_1 = S_1, \qquad a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2)$
부분합 $S_n$은 첫째 항부터 제$n$항까지의 합이므로, 이웃한 두 부분합의 차가 제$n$항이 된다.

**계산 과정**

1. 첫째 항은 $a_1 = S_1 = 3^2 + k = 9 + k$이다.
2. $n \geq 2$일 때,
$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} + k) - (3^n + k) = 2 \cdot 3^n$
이므로 $a_2 = 18$, $a_3 = 54$이고 둘째 항 이후의 공비는 3이다.
3. 첫째 항부터 같은 공비 3을 가져야 하므로 $a_2 = 3a_1$이다.
$18 = 3(9 + k)$
따라서 $9 + k = 6$이고 $k = -3$이다.

NoteBase

### 선지 판단

① O — $k=-3$이면 $a_1=6$, $a_2=18$, $a_3=54$이므로 처음부터 공비가 3인 등비수열이다.
② X — $k=-2$이면 $a_1=7$이어서 $a_2/a_1=18/7$이고 공비 3과 일치하지 않는다. 틀린 값 $k=-2$는 올바르게는 $k=-3$이다.
③ X — $k=-1$이면 $a_1=8$이어서 $a_2/a_1=18/8=9/4$이고 공비 3과 일치하지 않는다. 틀린 값 $k=-1$은 올바르게는 $k=-3$이다.
④ X — $k=0$이면 $a_1=9$이어서 $a_2/a_1=2$이지만 $a_3/a_2=3$이다. 틀린 값 $k=0$은 올바르게는 $k=-3$이다.

### 오답 포인트

$a_n=S_n-S_{n-1}$을 첫째 항에도 그대로 적용하면 상수 $k$가 소거되어 조건을 놓치게 된다. 이 관계는 $n\geq 2$에서 사용하고, 첫째 항은 반드시 $a_1=S_1$로 따로 구해야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

부분합이 주어지면 먼저 $a_1=S_1$을 구하고, 그다음 $n\geq 2$에서 $a_n=S_n-S_{n-1}$을 구한다. 이후 둘째 항 이후의 공비와 $a_2/a_1$이 같은지 확인하여 미정인 상수를 결정한다.

### 암기 포인트

부분합에서 항을 구할 때는 첫째 항만 $a_1=S_1$, 나머지는 $a_n=S_n-S_{n-1}$이다.

NoteBase

**문 9. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ 위의 점에서 직선 $y = x - 8$에 이르는 거리의 최솟값은?**

① 1

② $\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{2}$

**정답 2번**

### 출제 포인트

원의 중심에서 직선까지의 거리에서 원의 반지름을 빼서, 원 위의 점과 직선 사이 거리의 최솟값을 구하는 문제이다.

### 조건 정리

원의 방정식을 완전제곱식으로 고치면
$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$
이므로 중심은 $(1, -1)$, 반지름은 $2\sqrt{2}$이다. 직선은 $x - y - 8 = 0$으로 나타낼 수 있다.

### 사용할 공식

점 $(x_0, y_0)$과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는
$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
이다. 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름보다 크므로, 원 위의 점에서 직선까지의 최솟값은 중심과 직선 사이의 거리에서 반지름을 뺀 값이다.

### 계산 과정

중심 $(1, -1)$에서 직선 $x - y - 8 = 0$까지의 거리는
$\frac{|1 - (-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$
이다. 따라서 구하는 최솟값은
$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$
이다.

### 선지 판단

① X — 최솟값은 1이 아니라 $\sqrt{2}$이다. 틀린 값 1은 올바르게는 $\sqrt{2}$로 고쳐야 한다.

② O — 계산한 최솟값 $\sqrt{2}$와 일치한다.

③ X — 최솟값은 3이 아니라 $\sqrt{2}$이다. 틀린 값 3은 올바르게는 $\sqrt{2}$로 고쳐야 한다.

④ X — $2\sqrt{2}$는 원의 반지름일 뿐 최솟값이 아니다. 틀린 값 $2\sqrt{2}$는 올바르게는 $\sqrt{2}$로 고쳐야 한다.

NoteBase

**오답 포인트**

원의 반지름 $2\sqrt{2}$를 곧바로 답으로 고르는 것이 핵심 함정이다. 먼저 중심에서 직선까지의 거리 $3\sqrt{2}$를 구한 뒤 반지름 $2\sqrt{2}$를 빼야 한다.

**다시 나오면 이렇게 판단**

원 위의 점과 직선 사이의 최단거리는 먼저 중심과 직선 사이의 거리 $d$를 구한 다음, 직선이 원과 만나지 않을 때 $d - r$로 계산한다. $d \le r$이면 직선이 원과 만나므로 최솟값은 0이다.

**암기 포인트**

중심에서 직선까지의 거리와 반지름을 비교한다. 원과 직선이 떨어져 있으면 최단거리는 $d - r$이다.

NoteBase

**문 10. 부등식 $2[x]^2 - 5[x] + 2 < 0$의 해가 $\alpha \le x < \beta$일 때, $\alpha + \beta$의 값은? (단, $[x]$는 $x$보다 크지 않은 최대의 정수이다.)**

① 3

② 4

③ 5

④ 6

**정답 1번**

**출제 포인트**

이 문제는 가우스 기호 $[x]$를 하나의 정수로 놓고 이차부등식을 푼 뒤, $[x] = n$을 다시 $x$의 범위로 바꾸는 문제이다.

**조건 정리**

$n = [x]$로 놓으면 $n$은 정수이다. 구해야 할 것은 부등식을 만족하는 $x$의 범위 $\alpha \le x < \beta$에서 $\alpha + \beta$이다. 특히 $[x] = n$은 $n \le x < n + 1$을 뜻한다.

**사용할 공식**

$2n^2 - 5n + 2 = (2n - 1)(n - 2)$
따라서 $(2n - 1)(n - 2) < 0$의 해는 두 근 사이인 12<n<2이다. 이 공식을 쓰는 이유는 주어진 식이 $[x]$에 관한 이차부등식이므로 $[x]$를 정수 $n$으로 치환해 인수분해할 수 있기 때문이다.

**계산 과정**

1. $n = [x]$로 놓아 $2n^2 - 5n + 2 < 0$을 푼다.
2. $(2n - 1)(n - 2) < 0$에서 12<n<2를 얻는다.
3. 이 범위에 속하는 정수는 $n = 1$뿐이므로 $[x] = 1$이다.
4. $[x] = 1$이면 $1 \le x < 2$이므로 $\alpha = 1, \beta = 2$이다.
5. 따라서 $\alpha + \beta = 1 + 2 = 3$이다.

**선지 판단**

① O — 값 3은 계산 결과 $\alpha + \beta = 3$과 일치한다.
② X — 값 4는 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 4가 아니라 올바른 값은 3이다.
③ X — 값 5는 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 5가 아니라 올바른 값은 3이다.
④ X — 값 6은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 6이 아니라 올바른 값은 3이다.

NoteBase

### 오답 포인트

12<[x]<2를 곧바로 12<x<2로 바꾸면 안 된다. $[x]$는 정수이므로 먼저 가능한 값 $[x] = 1$을 찾고, 이를 $1 \le x < 2$로 바꾸어야 한다. 또한 가우스 기호의 구간은 왼쪽 끝을 포함하고 오른쪽 끝을 포함하지 않는다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

가우스 기호에 관한 부등식은 $n = [x]$로 치환하고, $n$의 범위를 푼 다음 그 범위에 속하는 정수만 고른다. 마지막에 [x]=n n≤ x<n+1을 이용해 $x$의 범위로 되돌린다.

### 암기 포인트

[x]=n n≤ x<n+1이며, $[x]$는 반드시 정수이다.

NoteBase

**문 11.** $n \geq 3$인 자연수 $n$에 대하여, 곡선 $y = -\frac{1}{nx} + n$과 직선 $y = (n-2)x$가 만나는 두 교점의 $x$좌표를 $A_n, B_n$이라 할 때, 급수 $\sum_{n=3}^{\infty} A_n B_n$을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{3}{4}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{3}{2}$

**정답 3번**

### 출제 포인트

두 교점의 $x$좌표의 곱을 이차방정식의 근과 계수의 관계로 구한 뒤, 부분분수로 급수를 계산하는 문제이다.

### 조건 정리

주어진 곡선과 직선의 교점에서는 $-\frac{1}{nx} + n = (n-2)x$가 성립한다. $n \geq 3$이므로 $n(n-2) \neq 0$이고, 두 근의 곱과 부분분수 공식을 적용할 수 있다.

### 사용할 공식

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 두 근을 $\alpha, \beta$라 하면 $\alpha\beta = \frac{c}{a}$이다. 또한 $\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)$이다. 교점의 두 $x$좌표가 교점 방정식의 두 근이고, 급수의 앞뒤 항을 소거할 수 있으므로 이 공식들을 사용한다.

### 계산 과정

교점 방정식에 $nx$를 곱해 정리하면

$n(n-2)x^2 - n^2x + 1 = 0$

이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의해

$A_n B_n = \frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)$

이다. 그러므로 부분합은

$\sum_{n=3}^{N} A_n B_n = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right)$

이고, $N \to \infty$이면 급수의 합은 $\frac{3}{4}$이다.

### 선지 판단

① X — $-\frac{3}{2}$는 부호와 값이 모두 맞지 않는다. 각 항 $A_n B_n = \frac{1}{n(n-2)}$은 양수이며, 올바른 합은 $\frac{3}{4}$이다.

② X — $-\frac{3}{4}$는 부호가 틀렸다. 각 항이 양수이므로 급수의 합도 양수이고, 올바르게는 $\frac{3}{4}$이다.

③ O — 망원급수에서 중간 항이 소거되고 $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$가 남는다.

④ X — $\frac{3}{2}$는 부분분수 앞의 계수 $\frac{1}{2}$를 반영하지 않은 값이다. 올바르게는 $\frac{3}{4}$이다.

NoteBase

### 오답 포인트

교점의 좌표를 각각 구하려고 복잡한 근의 공식을 적용하거나, $\frac{1}{n(n-2)}$를 부분분수로 나눌 때 계수 $\frac{1}{2}$를 빠뜨리면 ④를 고르기 쉽다. 또한 모든 항이 양수라는 점을 확인하면 음수인 ①, ②는 바로 제외된다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

두 교점의 좌표 자체가 아니라 곱을 묻는 경우에는 먼저 교점 조건을 하나의 이차방정식으로 만들고 근과 계수의 관계를 적용한다. 이어 일반항의 분모가 일정한 간격의 두 인수로 나뉘면 부분분수로 바꾸어 망원급수인지 확인한다.

### 암기 포인트

교점의 두 $x$좌표의 곱은 이차방정식의 상수항을 $x^2$의 계수로 나눈 값이다. 또한 $\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)$이다.

NoteBase

**문 12. 실수 전체에서 정의된 함수 $y = f(x)$는**
**f(x)=cases -x+2 & (x<0)\ 0 & (x=0)\ -x+2 & (0<x≤ 2)\ x-4 & (x>2) cases**
**라 정의되고, 다항식 $g(x)$는 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3+2} = 1$, $g(0) = 2$, 그리고 합성함수 $(g \circ f)(x)$는 실수 전체에서 연속임을 만족한다 하자. 이때 $g(1)$를 구하면?**

① $-3$

② $-1$

③ 1

④ 3

**정답 2번**

**출제 포인트**

합성함수의 연속성에서 다항식 $g(x)$의 함숫값 조건을 얻고, 최고차항과 세 근을 이용해 $g(x)$를 결정하는 문제이다.

**조건 정리**

$x = 0$에서 $f(0) = 0$이고 좌우에서 $f(x) \to 2$이므로, $(g \circ f)(x)$의 연속성에 의해 $g(0) = g(2)$이다. 주어진 $g(0) = 2$에서 $g(2) = 2$를 얻는다.
$x = 2$에서 왼쪽과 함수값은 $f(x) \to 0$, $f(2) = 0$이고 오른쪽에서는 $f(x) \to -2$이므로 $g(0) = g(-2)$이다.
따라서 $g(-2) = 2$이다.
또한 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^3+2} = 1$이므로 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이다.

**사용할 공식**

$h(x) = g(x) - 2$로 놓으면 $h(-2) = h(0) = h(2) = 0$이다. $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로
$h(x) = (x + 2)x(x - 2)$
이다. 세 근과 최고차항의 계수가 모두 정해졌으므로 이 인수분해식을 사용할 수 있다.

**계산 과정**

$g(x) - 2 = (x + 2)x(x - 2) = x^3 - 4x$
따라서
$g(x) = x^3 - 4x + 2$
이고,
$g(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 2 = -1$
이다.

NoteBase

### 선지 판단

① X — $g(1) = -1$이므로 '$-3$'은 틀리며, 올바른 값은 $-1$이다. $-3$은 상수항 $+2$를 빠뜨리고 $1 - 4$만 계산한 값이다.
② O — $g(1) = 1 - 4 + 2 = -1$이므로 계산 결과와 일치한다.
③ X — 계산 결과는 1이 아니라 $-1$이다. 따라서 '1'은 틀리며, 올바른 값은 $-1$이다.
④ X — 계산 결과는 3이 아니라 $-1$이다. 따라서 '3'은 틀리며, 올바른 값은 $-1$이다.

### 오답 포인트

$x = 0$에서는 $f(0) = 0$이지만 좌우극한은 2라는 점, $x = 2$에서는 오른쪽 극한이 $-2$라는 점을 구분해야 한다. 또한 마지막 대입에서 상수항 $+2$를 누락하면 ①의 $-3$이 나온다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

합성함수의 연속성 문제에서는 먼저 $f$의 식이 바뀌거나 불연속인 지점에서 함수값과 좌우극한을 각각 구한다. 그 값들을 $g$에 대입해 같은 함숫값 조건을 만든 뒤, 다항식의 차수와 최고차항의 계수로 다항식을 확정한다.

### 암기 포인트

합성함수의 연속성은 바깥 함수의 값으로 비교한다. 이 문제에서는 $g(-2) = g(0) = g(2) = 2$가 핵심이다.

NoteBase

**문 13. 미분가능인 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 아래의 조건을 만족한다 하자.**
**이때 $g'(0)$을 구하면?**

$f(0)=1,\ f'(0)=4,\ g(0)=2,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-2}{x}=5$

① -3

② -1

③ 0

④ 2

**정답 1번**

**출제 포인트**

극한을 곱함수의 도함수로 해석하고 곱의 미분법을 적용하여 $g'(0)$을 구하는 문제이다.

**조건 정리**

주어진 값은 $f(0)=1, f'(0)=4, g(0)=2$이다. 구해야 할 값은 $g'(0)$이다. 또한 $f(0)g(0)=2$이므로 극한의 분자는 $f(x)g(x)-f(0)g(0)$으로 바꿀 수 있다.

**사용할 공식**

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=(fg)'(0)$

$(fg)'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

주어진 극한은 곱함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수이므로 이 공식이 적용된다.

**계산 과정**

주어진 극한에서 $(fg)'(0)=5$이다. 곱의 미분법에 값을 대입하면

$5=4\cdot 2+1\cdot g'(0)=8+g'(0)$

이므로

$g'(0)=5-8=-3$

이다.

**선지 판단**

① O — 계산 결과 $g'(0)=-3$이므로 옳다.

② X — $-1$은 계산 결과와 다르다. $-1$이 아니라 $g'(0)=-3$이다.

③ X — 0은 계산 결과와 다르다. 0이 아니라 $g'(0)=-3$이다.

④ X — 2는 주어진 값 $g(0)$과 혼동한 값이다. $g'(0)=2$가 아니라 $g(0)=2$이고, $g'(0)=-3$이다.

NoteBase

**오답 포인트**

극한값 5를 바로 $g'(0)$으로 보거나, $g(0)=2$를 $g'(0)$과 혼동하면 안 된다. 이 극한은 $g$가 아니라 곱함수 $fg$의 미분계수이므로 $f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$을 계산해야 한다.

**다시 나오면 이렇게 판단**

분자가 함수값의 차이고 분모가 $x-a$인 극한은 먼저 미분계수의 정의로 바꾼다. 곱함수이면 곱의 미분법을 적용한 뒤 주어진 함수값과 도함숫값을 대입한다.

**암기 포인트**

곱의 미분은 $(fg)'=f'g+fg'$이다. 두 항 모두 함수값과 도함숫값을 하나씩 곱한다.

NoteBase

**문 14. 두 함수 $f(x)=x^3-3x^2+x$, $g(x)=3x^3-11x$에 대하여, $g(x)$를 $y$축의 방향으로 $\alpha$만큼 평행이동시켜 $f(x)$와 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 $\alpha$의 합은?**

① $-15$

② $-13$

③ $-5$

④ $0$

**정답 2번**

### 출제 포인트

두 함수의 교점 개수가 정확히 2개가 되도록 하는 수평선과 삼차함수의 접점 조건을 이용해 $\alpha$를 구하는 문제이다.

### 조건 정리

평행이동한 함수는 $y=g(x)+\alpha$이다. 교점의 $x$좌표는 $f(x)=g(x)+\alpha$를 만족하므로,
$h(x)=f(x)-g(x)=-2x^3-3x^2+12x$라 두면 방정식 $h(x)=\alpha$의 서로 다른 실근이 정확히 2개여야 한다.

### 사용할 공식

삼차함수 $y=h(x)$와 수평선 $y=\alpha$가 서로 다른 두 점에서만 만나려면 수평선이 삼차함수의 극대점 또는 극소점에서 접해야 한다. 따라서 $h'(x)=0$인 지점의 함숫값을 구한다.

### 계산 과정

$h'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$
따라서 극값을 갖는 $x$는 $-2, 1$이다.
$h(-2)=-20, \quad h(1)=7$
가능한 $\alpha$는 $-20$과 $7$이고, 그 합은
$(-20)+7=-13$
이다.

### 선지 판단

① X — 모든 $\alpha$의 합을 $-15$로 본 값은 계산 결과와 다르다. 올바르게는 $(-20)+7=-13$이다.
② O — 가능한 두 값 $-20, 7$의 합이 $-13$이다.
③ X — 모든 $\alpha$의 합을 $-5$로 본 값은 두 극값의 합과 다르다. 올바르게는 $-13$이다.
④ X — 모든 $\alpha$의 합을 0으로 본 것은 두 극값이 서로 반대수라고 잘못 판단한 것이다. 올바르게는 $-13$이다.

NoteBase

### 오답 포인트

'서로 다른 두 점'을 중근 하나만 존재한다는 뜻으로 오해하기 쉽다. 이 경우에는 접점에서 생기는 중근 1개와 다른 교점에서 생기는 단순근 1개가 있어 서로 다른 교점이 2개가 된다. 또한 평행이동 뒤의 식이 $g(x)+\alpha$이므로 $f(x)-g(x)=\alpha$라는 부호를 정확히 잡아야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

두 삼차함수의 한쪽을 수직 평행이동한 뒤 교점이 정확히 2개가 되는 조건은 차함수 $h=f-g$와 수평선 $y=\alpha$의 접점 조건으로 바꾼다. 이어서 $h'(x)=0$의 해를 구하고 각 극값을 $\alpha$의 후보로 판단한다.

### 암기 포인트

삼차함수와 수평선의 서로 다른 교점이 2개이면 수평선은 극대점이나 극소점에서 접한다.

NoteBase

**문 15. 함수 $f(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여, 아래의 세 가지 조건을 만족한다 하자. 이때 $\int_{-5}^{6} f(x)dx$를 구하면?**

(1) $f(-x) = f(x)$
(2) $f(x) = f(x+2)$
(3) $\int_{-1}^{1} (4x^3 + 5x - 2)f(x)dx = -12$

① 6
② 15
③ 27
④ 33

**정답 4번**

### 출제 포인트

짝함수와 홀함수의 곱을 대칭구간에서 적분하는 성질 및 주기함수의 한 주기 적분값을 이용해 넓은 구간의 적분값을 구하는 문제이다.

### 조건 정리

$f(-x) = f(x)$이므로 $f$는 짝함수이다. 또한 $f(x) = f(x+2)$이므로 주기는 2이다. 주어진 적분식으로 한 주기인 $[-1, 1]$에서의 적분값을 먼저 구한 뒤, $[-5, 6]$을 주기 길이 2인 구간들과 나머지 구간으로 나눈다.

### 사용할 공식

홀함수 $h$에 대하여 $\int_{-a}^{a} h(x)dx = 0$이다. 주기가 2인 함수는 임의의 $a$에 대하여 $\int_{a}^{a+2} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx$를 만족한다. 첫 번째 성질은 $4x^3 + 5x$와 짝함수 $f(x)$의 곱이 홀함수이기 때문에 사용하고, 두 번째 성질은 길이 2인 각 구간의 적분값이 같기 때문에 사용한다.

NoteBase

### 계산 과정

$4x^3 + 5x$는 홀함수이고 $f(x)$는 짝함수이므로 $(4x^3 + 5x)f(x)$는 홀함수이다. 따라서
$\int_{-1}^{1}(4x^3 + 5x)f(x)dx = 0.$
주어진 조건을 정리하면
$0 - 2\int_{-1}^{1} f(x)dx = -12,$
따라서
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 6.$
주기가 2이므로 $[-5, 5]$는 다섯 주기에 해당하여 적분값이 $5 \times 6 = 30$이다. 또 주기성을 이용하면
$\int_{5}^{6} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx.$
짝함수의 대칭성에 따라
∫ _-1^0f(x) dx=12 ∫ _-1^1f(x) dx=3.
그러므로
$\int_{-5}^{6} f(x)dx = 30 + 3 = 33.$

### 선지 판단

① X — 6은 한 주기에서의 적분값일 뿐 전체 구간의 적분값이 아니다. ‘6’은 틀린 값이며, 올바른 전체 적분값은 33이다.
② X — 15는 다섯 주기의 적분값 30과 남은 반 주기의 적분값 3을 반영하지 못한 값이다. ‘15’는 틀린 값이며, 올바른 값은 33이다.
③ X — 27은 계산된 다섯 주기의 값 30보다도 작고 남은 반 주기의 값 3을 합한 결과와 일치하지 않는다. ‘27’은 틀린 값이며, 올바른 값은 33이다.
④ O — 다섯 주기의 적분값 30과 남은 반 주기의 적분값 3을 합하면 33이다.

### 오답 포인트

주어진 식에서 홀함수 부분의 적분만 0이 되고, 상수항 $-2$가 곱해진 $f(x)$의 적분은 남는다는 점이 핵심이다. 또한 $[-5, 6]$의 길이는 11이므로 다섯 주기만 계산하고 끝내지 않고, 남은 길이 1의 구간을 짝함수의 대칭성으로 계산해야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

대칭구간에서는 함수의 홀짝성을 먼저 판정하고, 주기함수의 넓은 구간 적분은 완전한 주기 구간과 남는 구간으로 분해한다. 남는 구간이 반 주기이면 짝함수의 대칭성을 함께 적용한다.

### 암기 포인트

홀함수의 대칭구간 적분은 0이고, 주기함수의 한 주기 적분값은 시작점과 무관하다. 짝함수는 ∫ _-a^0f(x) dx=12 ∫ _-a^af(x) dx이다.

NoteBase

**문 16. 함수 $f(x)=x^3+2x-2$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^{10} g(x)dx$를 구하면?**

① $\frac{17}{4}$
② $\frac{19}{4}$
③ $\frac{39}{4}$
④ $\frac{57}{4}$

**정답 4번**

### 출제 포인트

역함수의 정적분 공식과 원함수·역함수의 대응 구간을 이용해 적분값을 구하는 문제이다.

### 조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=x^3+2x-2$이고, $g=f^{-1}$이다.
$f'(x)=3x^2+2>0$이므로 $f$는 전 구간에서 일대일대응이며 역함수가 존재한다.
$f(1)=1, f(2)=10$이므로 $g(x)$의 적분 구간 $[1,10]$은 $f(x)$에서 $[1,2]$에 대응한다.

### 사용할 공식

역함수의 정적분 공식은
$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)dx$
이다. 원함수의 그래프와 역함수의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로, 두 적분의 합이 대응 구간으로 이루어진 직사각형의 넓이에서 양 끝의 보정량을 반영한 값이 된다.

### 계산 과정

$a=1, b=2$를 대입한다.
$\int_1^{10} g(y)dy = 2\cdot 10-1\cdot 1-\int_1^2 (x^3+2x-2)dx$
원함수의 정적분은
∫_1^2(x^3+2x-2) dx=≤ft[(x^4)/(4)+x^2-2x]_1^2=4-≤ft(-34)=(19)/(4)
이다. 따라서
$\int_1^{10} g(y)dy = 19-\frac{19}{4}=\frac{57}{4}$
이다.

NoteBase

### 선지 판단

① X — 계산값은 $\frac{17}{4}$가 아니라 $\frac{57}{4}$이다. 틀린 값 $\frac{17}{4}$ → 올바르게는 $\frac{57}{4}$이다.
② X — $\frac{19}{4}$는 $\int_1^2 f(x)dx$의 값일 뿐, 구하려는 역함수의 적분값이 아니다. 틀린 값 $\frac{19}{4}$ → 올바르게는 $19 - \frac{19}{4} = \frac{57}{4}$이다.
③ X — $\frac{39}{4}$는 역함수 정적분 공식에 따라 계산한 값과 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{39}{4}$ → 올바르게는 $\frac{57}{4}$이다.
④ O — 역함수 정적분 공식에 $f(1) = 1, f(2) = 10$을 적용하면 $\frac{57}{4}$가 된다.

### 오답 포인트

②의 $\frac{19}{4}$는 원함수 $f$의 정적분값을 그대로 답으로 고른 경우이다. 역함수 적분에서는 대응하는 원함수 구간 $[1, 2]$을 먼저 찾고, 끝점 항 $2f(2) - 1f(1) = 19$에서 원함수의 적분값을 빼야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

역함수의 정적분에서는 먼저 적분 양 끝값을 $f(a), f(b)$로 나타내어 원함수의 대응 구간 $[a, b]$을 찾고, 역함수 정적분 공식에 대입한 뒤 원함수의 적분을 계산한다.

### 암기 포인트

역함수 적분은 '끝점 곱의 차에서 원함수 적분을 뺀다': $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx$이다.

NoteBase

**문 17. 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3\}$이라 하고, 집합 $F$는 $A$에서 $B$로의 함수 중 치역과 공역이 같은 함수들을 다 모아둔 집합이라 하자. $F$에서 하나의 원소 $f$를 선택할 때 조건 '$x_1<x_2$라면 $f(x_1)\le f(x_2)$'를 만족할 확률은?**

① $\frac{1}{25}$
② $\frac{3}{25}$
③ $\frac{6}{25}$
④ $\frac{9}{25}$

**정답 1번**

### 출제 포인트

이 문제는 전사함수의 개수와 비감소 전사함수의 개수를 각각 구하여 확률을 계산하는 문제이다.

### 조건 정리

전체 경우: 치역과 공역이 같으므로 $f:A\to B$는 $B=\{1,2,3\}$의 세 값을 모두 사용하는 전사함수이다.
구해야 할 경우: $x_1<x_2$이면 $f(x_1)\le f(x_2)$이므로 함수값의 열 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$가 비감소하면서 1, 2, 3을 모두 포함해야 한다.

### 사용할 공식

포함배제 원리에 따라 전사함수의 수는
$3^5-\binom{3}{1}2^5+\binom{3}{2}1^5$
이다. 비감소 전사함수는 1, 2, 3이 각각 연속된 한 묶음으로 나타나므로, 그 개수는 5를 세 양의 정수의 합으로 나누는 경우의 수
$\binom{5-1}{3-1}=\binom{4}{2}$
와 같다.

### 계산 과정

1. 전체 전사함수의 수는 $3^5-3\cdot 2^5+3\cdot 1^5=243-96+3=150$이다.
2. 조건을 만족하는 함수값의 열은 1, …, 1, 2, …, 2, 3, …, 3의 꼴이다. 각 값의 출현 횟수가 양수이고 합이 5이므로 그 수는 $\binom{4}{2}=6$이다.
3. 따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{150}=\frac{1}{25}$이다.

NoteBase

### 선지 판단

① O — 계산한 확률 $\frac{1}{25}$와 일치한다.
② X — $\frac{3}{25} = \frac{18}{150}$이지만 조건을 만족하는 함수는 6개뿐이다. 올바른 값은 $\frac{1}{25}$이다.
③ X — $\frac{6}{25} = \frac{36}{150}$이지만 조건을 만족하는 함수는 6개뿐이다. 올바른 값은 $\frac{6}{150} = \frac{1}{25}$이다.
④ X — $\frac{9}{25} = \frac{54}{150}$이지만 조건을 만족하는 함수는 6개뿐이다. 올바른 값은 $\frac{1}{25}$이다.

### 오답 포인트

전체 표본공간을 모든 함수 $3^5$개로 잡으면 안 된다. 집합 $F$ 자체가 이미 전사함수만 모은 집합이므로 분모는 포함배제로 구한 150이다. 또한 비감소 조건에서는 같은 함수값이 한 연속 구간을 이루므로 유리한 경우는 세 값의 양의 출현 횟수를 정하는 6가지이다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

함수 집합에서 무작위로 고르는 확률은 먼저 집합의 정의로 분모를 확정하고, 순서 조건을 함수값의 열로 바꾸어 분자를 센 뒤 약분한다.

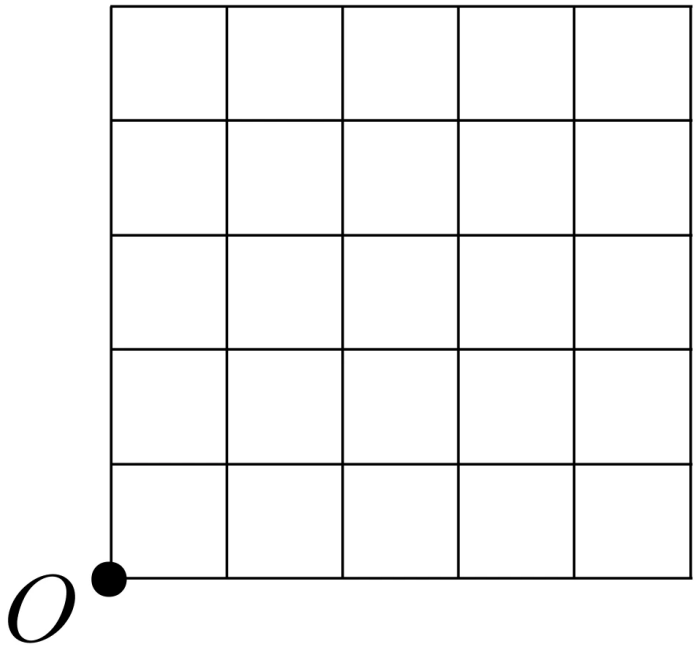
### 암기 포인트

크기 $n$인 순서 있는 정의역에서 $k$개의 값을 모두 쓰는 비감소 함수의 수는 각 값의 양의 출현 횟수를 정하는 $\binom{n-1}{k-1}$이다.

NoteBase

**문 18. 한 변의 길이가 1인 25개의 정사각형들로 이루어진 아래의 그림과 같은 판 위에서 다음의 규칙으로 주사위 게임을 한다 하자. 이때 주사위를 5번 던졌을 때 $O$로부터 길이가 5보다 작은 점에 도착할 확률은?**

[규칙] $O$에서 출발하여 3의 배수가 나오면 위로 한 칸, 그렇지 않으면 오른쪽으로 한 칸 이동한다.




① $\frac{30}{243}$
② $\frac{120}{243}$
③ $\frac{210}{243}$
④ 1

**정답 3번**

**출제 포인트**

주사위 한 번마다 위쪽 또는 오른쪽으로 한 칸 이동할 때, 5번 이동한 뒤 출발점으로부터의 거리가 5보다 작아지는 확률을 구하는 문제이다.

**조건 정리**

3의 배수인 눈은 3, 6이므로 위로 이동할 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다. 그 밖의 눈은 1, 2, 4, 5이므로 오른쪽으로 이동할 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.
5번 중 위로 이동한 횟수를 $k$라 하면 오른쪽으로 이동한 횟수는 $5-k$이고, 도착점까지의 거리는 $\sqrt{k^2+(5-k)^2}$이다.

NoteBase

### 사용할 공식

구하는 확률은 전체 확률에서 거리가 5인 두 끝 경우를 빼서 구한다.
P(거리<5)=1-P(k=0)-P(k=5)
$k = 1, 2, 3, 4$이면 $k^2 + (5-k)^2 < 25$이므로 거리가 5보다 작고, $k = 0$ 또는 $k = 5$이면 거리가 정확히 5이기 때문이다.

### 계산 과정

위로 한 번도 이동하지 않을 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$이다.
위로만 5번 이동할 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$이다.
따라서
$1 - \frac{32}{243} - \frac{1}{243} = \frac{210}{243}$
이다.

### 선지 판단

① X — $\frac{30}{243}$은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 $\frac{30}{243}$을 올바르게 고치면 $\frac{210}{243}$이다.
② X — $\frac{120}{243}$은 두 끝 경우를 제외한 확률이 아니다. 틀린 값 $\frac{120}{243}$을 올바르게 고치면 $\frac{210}{243}$이다.
③ O — 전체 확률에서 오른쪽으로만 이동하는 확률 $\frac{32}{243}$과 위로만 이동하는 확률 $\frac{1}{243}$을 빼면 $\frac{210}{243}$이다.
④ X — 확률은 1이 아니다. 한 방향으로만 5번 이동하면 출발점에서 거리가 정확히 5이므로 조건을 만족하지 않으며, 올바른 값은 $\frac{210}{243}$이다.

### 오답 포인트

‘길이가 5보다 작은’은 5를 포함하지 않는다. 위로만 5번 또는 오른쪽으로만 5번 이동한 경우의 거리는 정확히 5이므로 반드시 제외해야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

격자에서 가로 이동 횟수와 세로 이동 횟수를 좌표로 놓고 피타고라스 정리로 거리를 판정한다. 만족하는 경우를 직접 모두 더하는 것보다, 제외되는 끝 경우가 적으면 여사건을 이용한다.

### 암기 포인트

5번의 단위 이동에서 거리가 5가 되는 경우는 한 방향으로만 5번 이동한 두 경우이다. ‘5보다 작다’에서는 이 두 경우를 뺀다.

NoteBase

**문 19. 5개의 자료 $x_1, x_2, \cdots, x_5$에 대하여 $z_i = 2x_i - 10$ $(i = 1, 2, \cdots, 5)$은 $\sum_{i=1}^{5} z_i = 10$, $\sum_{i=1}^{5} z_i^2 = 100$일 때, 자료 $x_1, x_2, \cdots, x_5$의 분산을 구하면?**

① 1

② 2

③ 3

④ 4

**정답 4번**

### 출제 포인트

자료의 분산을 제곱의 평균과 평균의 제곱으로 구하고, 일차변환에 따른 분산의 변화를 적용하는 문제이다.

### 조건 정리

주어진 값: $\sum_{i=1}^{5} z_i = 10$, $\sum_{i=1}^{5} z_i^2 = 100$이다.
구해야 할 값: 자료 $x_1, x_2, \cdots, x_5$의 분산이다.
주의할 조건: $z_i = 2x_i - 10$에서 상수 $-10$은 분산에 영향을 주지 않고, 계수 2는 분산을 $2^2 = 4$배로 만든다.

### 사용할 공식

자료 $z_1, z_2, \cdots, z_5$의 평균을 $\bar{z}$, 분산을 $V(z)$라 하면

$$\bar{z} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} z_i, \qquad V(z) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} z_i^2 - \bar{z}^2$$

이다. 또한 $z = 2x - 10$이므로

$$V(z) = 2^2 V(x) = 4V(x)$$

이다. 첫 번째 공식은 제곱합과 합으로 분산을 구하기 위해 사용하고, 두 번째 공식은 일차변환된 자료의 분산을 원래 자료의 분산으로 되돌리기 위해 사용한다.

### 계산 과정

1. $z$의 평균은 $\bar{z} = 10/5 = 2$이다.
2. $z$의 분산은 $V(z) = 100/5 - 2^2 = 20 - 4 = 16$이다.
3. $16 = 4V(x)$이므로 $V(x) = 4$이다.

### 선지 판단

① X — 계산된 분산은 4이므로 1은 틀린 값이다. 올바르게는 분산이 4이다.
② X — 계산된 분산은 4이므로 2는 틀린 값이다. 올바르게는 분산이 4이다.
③ X — 계산된 분산은 4이므로 3은 틀린 값이다. 올바르게는 분산이 4이다.
④ O — $V(z) = 16$이고 $V(z) = 4V(x)$이므로 $V(x) = 4$이다.

NoteBase

**오답 포인트**

$\sum z_i^2/5 = 20$은 분산이 아니라 제곱의 평균이다. 여기서 평균의 제곱 $2^2 = 4$를 빼야 $V(z) = 16$이 된다. 또한 $z = 2x - 10$에서 분산은 2배가 아니라 계수의 제곱인 4배가 되므로, $x$의 분산은 16을 4로 나눈 값이다.

**다시 나오면 이렇게 판단**

먼저 합과 제곱합으로 변환된 자료의 분산을 구한 뒤, $V(ax + b) = a^2V(x)$를 적용하여 원래 자료의 분산을 계산한다.

**암기 포인트**

분산은 '제곱의 평균에서 평균의 제곱을 뺀 값'이며, $ax + b$의 분산은 $a^2$배이다.

NoteBase

**문 20. 크기와 모양이 같은 빨간색 공 3개와 파란색 공 2개가 있는 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 그 색깔을 확인한 후 다시 주머니 속에 집어 넣는다. 매회 시행마다 빨간색 공을 뽑으면 3점을 획득하고, 파란색 공을 뽑으면 2점을 잃는 게임을 한다 하자. 처음 0점에서 시작하여 이 게임을 150회 시행 후 점수가 180점 이상일 확률을 아래쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면?**

| $z$ | $P(0 \leq Z \leq z)$ |
|---|---|
| 0.5 | 0.19 |
| 1.0 | 0.34 |
| 1.5 | 0.43 |
| 2.0 | 0.48 |

① 0.07

② 0.16

③ 0.43

④ 0.69

**정답 2번**

**출제 포인트**

한 번의 게임에서 얻는 점수의 평균과 분산을 구한 뒤, 150회 점수의 합을 중심극한정리로 표준화하여 확률을 구하는 문제이다.

**조건 정리**

한 번의 점수를 $X$라 하면 $P(X=3)=\frac{3}{5}$, $P(X=-2)=\frac{2}{5}$이다. 150회 점수의 합을 $S=X_1+\cdots+X_{150}$라 하고 $P(S \geq 180)$을 구한다.

NoteBase

### 사용할 공식

$E(X)=\sum xP(X=x), \qquad \mathrm{Var}(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
독립적으로 같은 게임을 반복하므로 $E(S)=150E(X)$, $\mathrm{Var}(S)=150\mathrm{Var}(X)$이다. 시행 횟수가 충분히 크므로 중심극한정리에 따라 $S$를 정규분포로 근사한다.

### 계산 과정

1. 한 번의 점수의 평균은 $E(X)=3\cdot\frac{3}{5}+(-2)\cdot\frac{2}{5}=1$이다.
2. $E(X^2)=9\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{2}{5}=7$이므로 $\mathrm{Var}(X)=7-1^2=6$이다.
3. 따라서 $E(S)=150$, $\mathrm{Var}(S)=150\cdot 6=900$, $\sigma_S=30$이다.
4. 180점을 표준화하면 $z=\frac{180-150}{30}=1$이다. 따라서 P(S≥180)≈ P(Z≥1)이다.
5. 표에서 P(0≤ Z≤1)=0.34이므로 P(Z≥1)=0.5-0.34=0.16이다.

### 선지 판단

① X — 0.07은 이 문항의 표준화값 $z=1$에 대한 오른쪽 꼬리확률이 아니다. 0.07이 아니라 $0.5-0.34=0.16$이다.
② O — $z=1$의 오른쪽 꼬리확률은 0.5-P(0≤ Z≤1)=0.5-0.34=0.16이다.
③ X — 0.43은 표에서 P(0≤ Z≤1.5)에 해당하는 중앙 구간의 넓이로, 구하려는 P(Z≥1)이 아니다. 올바른 확률은 0.16이다.
④ X — 0.69는 0.5+0.19=P(Z≤0.5)에 해당하며 표준화값과 확률의 방향이 모두 다르다. 올바르게는 P(Z≥1)=0.16이다.

### 오답 포인트

표의 값 0.34는 P(Z≤1)도 P(Z≥1)도 아니라 P(0≤ Z≤1)이다. 오른쪽 꼬리확률을 구하려면 0.5에서 0.34를 빼야 한다.

### 다시 나오면 이렇게 판단

반복 시행의 합은 한 번의 평균과 분산을 먼저 구하고, 합의 평균과 표준편차로 기준값을 표준화한 뒤, 정규분포표가 나타내는 구간과 문제에서 요구한 꼬리의 방향을 맞추어 판단한다.

### 암기 포인트

합의 평균은 시행 횟수만큼, 합의 분산도 시행 횟수만큼 커진다. 표가 $P(0\le Z\le z)$를 주면 오른쪽 꼬리는 0.5-표의 값이다.

NoteBase