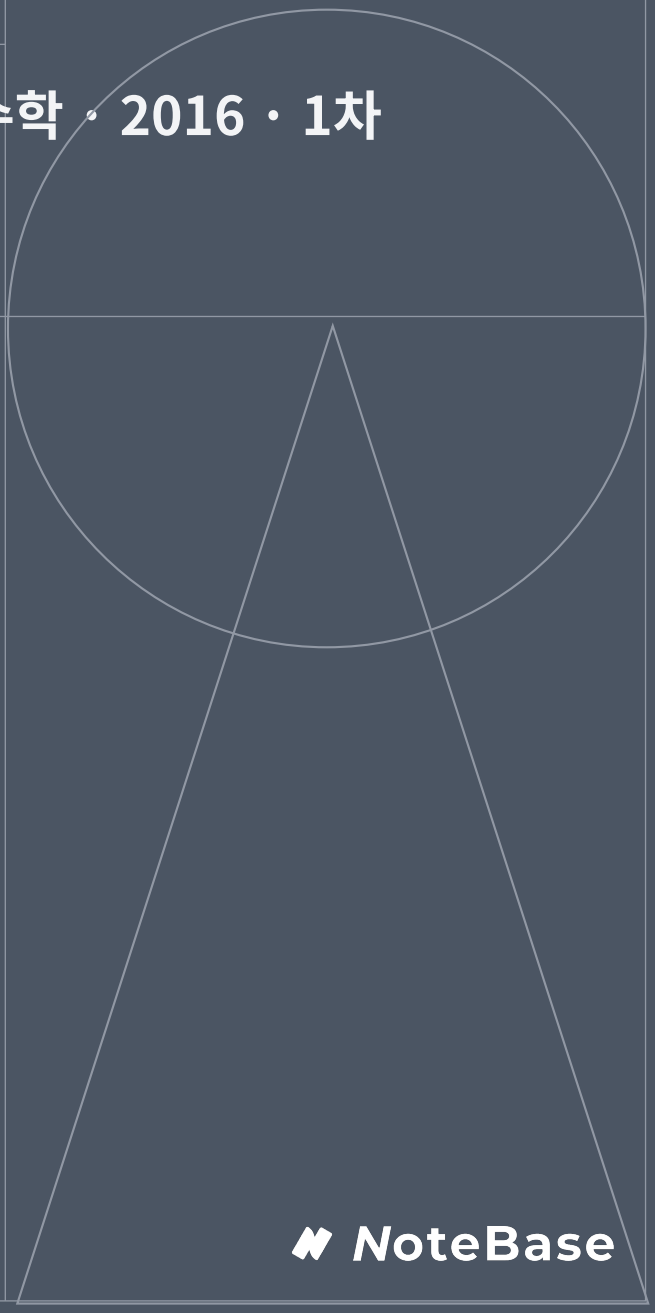
기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2016 · 1차



NoteBase

기출OX 해설집

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2016 · 1차

공무원/경찰/공채(순경) · 수학 · 2016 · 1차

문 1. $a>0,\ b>0$**일 때,** $(3a+4b)(\frac{3}{a}+\frac{1}{b})$**의 최솟값은?**

① 16

② 25

③ 36

④ 49

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 양수 조건에서 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 식의 최솟값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $a>0,\ b>0$이다. 따라서 $x=\frac{a}{b}>0$로 둘 수 있으며, 구해야 할 값은 주어진 식 전체의 최솟값이다.

사용할 공식

양수 u, v에 대하여

$u+v\geq 2\sqrt{uv}$

이고, 등호는 $u=v$일 때 성립한다. 식을 전개하면 양수인 두 항 $3\frac{a}{b}$와 $12\frac{b}{a}$의 곱이 일정하므로 이 공식을 적용할 수 있다.

계산 과정

식을 전개하면

$(3a+4b)\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=13+3\frac{a}{b}+12\frac{b}{a}$

이다. 여기서

$3\frac{a}{b}+12\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{3\frac{a}{b}\cdot 12\frac{b}{a}}=12$

이므로 전체 식은 $13+12=25$ 이상이다. 등호 조건은 $3\frac{a}{b}=12\frac{b}{a}$이고, 양수 조건에서 $a=2b$일 때 성립한다. 따라서 최솟값 25는 실제로 얻어진다.

NoteBase

선지 판단

① X — 16은 최솟값이 아니다. 주어진 식은 항상 25 이상이므로, 올바르게는 최솟값이 25이다.
② O — 산술평균과 기하평균의 관계로 식이 25 이상이고 $a = 2b$일 때 25가 되므로 최솟값이다.
③ X — 36은 $a = 2b$일 때 얻어지는 값보다 크므로 최솟값이 아니다. 올바르게는 최솟값이 25이다.
④ X — 49는 $a = 2b$일 때 얻어지는 값보다 크므로 최솟값이 아니다. 올바르게는 최솟값이 25이다.

오답 포인트

전개할 때 상수항은 $3a \cdot \frac{3}{a} = 9$와 $4b \cdot \frac{1}{b} = 4$의 합인 13이다. 또한 부등식으로 하한만 구한 뒤 끝내면 안 되고, $a = 2b$에서 등호가 성립하여 25가 실제 최솟값인지 확인해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

양수 두 변수의 비와 역수가 함께 나타나면 식을 전개한 뒤 $x = \frac{a}{b}$로 정리한다. 이어서 곱이 일정한 양수 두 항에 산술평균과 기하평균의 관계를 적용하고, 등호 조건을 확인하여 최솟값의 달성 가능성까지 판단한다.

암기 포인트

양수 x에 대하여 $px + \frac{q}{x} \geq 2\sqrt{pq}$이고, 등호는 $px = \frac{q}{x}$일 때 성립한다.

NoteBase

문 2. 다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 x^2+x+1이다. 다항식 $f(6x)$를 $6x^2-5x+1$로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$라 할 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 31

② 36

③ 41

④ 46

정답 3번

출제 포인트

나누는 다항식의 근을 대입하면 원래 다항식과 나머지의 값이 같다는 나머지정리를 이용해 일차 나머지의 계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

$f(x)$를 $(x-1)(x-2)(x-3)$으로 나눈 나머지가 x^2+x+1이므로 $f(2)=7$, $f(3)=13$이다.
또한 $6x^2-5x+1=(3x-1)(2x-1)$이므로 이 식의 근은 $x=\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$이다. 구해야 할 것은 나머지 $ax+b$의 계수로 만든 $a-b$이다.

사용할 공식

다항식 $P(x)$를 $x-c$로 나눈 나머지는 $P(c)$이다. 따라서 $f(6x)$와 나머지 $ax+b$는 $6x^2-5x+1$의 두 근에서 같은 값을 갖는다.

계산 과정

$x=\frac{1}{3}$이면 $6x=2$이므로
$\frac{a}{3}+b=f(2)=2^2+2+1=7$.
$x=\frac{1}{2}$이면 $6x=3$이므로
$\frac{a}{2}+b=f(3)=3^2+3+1=13$.
두 식을 빼면 $\frac{a}{6}=6$이므로 $a=36$이다. 이를 첫째 식에 대입하면 $12+b=7$이므로 $b=-5$이다. 따라서
$a-b=36-(-5)=41$.

선지 판단

① X — 31은 $a+b=36+(-5)$의 값이다. 문제에서 요구한 값은 $a-b$이며, 올바른 값은 41이다.
② X — 36은 a의 값만 나타낸다. $b=-5$까지 반영한 $a-b$의 올바른 값은 41이다.
③ O — $a=36$, $b=-5$이므로 $a-b=41$이다.
④ X — 46은 연립방정식에서 구한 $a=36$, $b=-5$와 일치하지 않는다. 올바르게 계산하면 $a-b=41$이다.

NoteBase

오답 포인트

①의 31은 $a-b$ 대신 $a+b$를 계산하면 나오는 값이다. 또한 $f(6x)$에 대입되는 값은 나누는 식의 근 $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$가 아니라 각각 2와 3이라는 점을 구분해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

합성된 다항식을 나누는 문제에서는 먼저 나누는 다항식의 근을 구하고, 그 근을 합성식의 안쪽에 대입한 값을 계산한 뒤, 원래 나머지식의 값과 연결해 연립방정식을 세운다.

암기 포인트

나누는 식의 근에서는 피제수와 나머지의 값이 같다. $f(6x)$에서는 근을 구한 뒤 반드시 $6x$의 값으로 바꾸어 f에 대입한다.

NoteBase

문 3. 부등식 $x^2 - 2x - 2 > 2|x - 1|$의 해가 이차부등식 $ax^2 - 2x + b > 0$의 해와 같을 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -7

② -5

③ -3

④ -1

정답 1번

출제 포인트

절댓값 부등식을 구간으로 바꾸어 해의 경계값을 구한 뒤, 같은 해를 갖는 이차부등식의 계수를 결정하는 문제이다.

조건 정리

주어진 부등식은 $x^2 - 2x - 2 > 2|x - 1|$이다.
구해야 할 값은 두 부등식의 해가 같을 때의 $a + b$이다.
부등호가 $>$이므로 해의 경계가 되는 근은 해에 포함되지 않는다.

사용할 공식

$t = x - 1$로 놓으면 $x^2 - 2x - 2 = t^2 - 3$이다. 또한 $y = |t| \geq 0$로 놓아 절댓값 부등식을 이차부등식으로 바꿀 수 있다.
같은 해가 두 근의 바깥쪽 구간이면 이차식의 최고차항 계수는 양수이고, 두 경계값이 그 이차식의 근이 된다.

계산 과정

1. $t = x - 1$로 놓으면 주어진 부등식은 $t^2 - 3 > 2|t|$이 된다.
2. $y = |t| \geq 0$로 놓으면 $y^2 - 2y - 3 > 0$, 즉 $(y - 3)(y + 1) > 0$이다. $y \geq 0$이므로 $y > 3$이다.
3. 따라서 $|x - 1| > 3$이고, 그 해는 $x < -2$ 또는 $x > 4$이다.
4. 이 해를 갖는 이차식은 양의 상수 k에 대하여 $k(x + 2)(x - 4)$의 꼴이다. 전개하면 $k(x^2 - 2x - 8)$이다.
5. $ax^2 - 2x + b$의 x의 계수가 -2이므로 $-2k = -2$에서 $k = 1$이다. 따라서 $a = 1$, $b = -8$이고 $a + b = -7$이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $a+b=-7$이므로 옳다.
② X — $a=1, b=-8$이므로 -5가 아니다. 틀린 값 -5는 -7로 고쳐야 한다.
③ X — 두 근 $-2, 4$로 만든 이차식의 계수를 비교하면 $a+b=-7$이므로 -3은 틀리다. 틀린 값 -3은 -7로 고쳐야 한다.
④ X — x의 계수 -2까지 비교하면 비례상수는 1이므로 $a+b=-7$이다. 틀린 값 -1은 -7로 고쳐야 한다.

오답 포인트

$|x-1|>3$을 $-2<x<4$로 바꾸는 것이 대표적인 함정이다. 절댓값이 기준값보다 크면 가운데 구간이 아니라 바깥쪽 두 구간 $x<-2$ 또는 $x>4$가 된다. 또한 근만 맞춘 뒤 비례상수를 생략하면 a와 b를 확정할 수 없으므로 x의 계수 -2를 반드시 비교해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

절댓값을 하나의 문자로 치환해 해의 경계값을 먼저 구하고, 해가 근 사이인지 근 바깥인지에 따라 최고차항 계수의 부호를 정한다. 이어 두 근으로 이차식을 인수분해한 뒤 주어진 계수와 비교해 비례상수를 결정한다.

암기 포인트

$|u|>c$는 바깥쪽, $|u|<c$는 안쪽이다. 같은 두 근을 갖는 이차식은 상수배 관계이므로 주어진 계수 하나를 비교해야 한다.

NoteBase

문 4. 이차방정식 $x^2 - 9x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$의 값은?

① $2\sqrt{11}$
② $2\sqrt{12}$
③ $3\sqrt{11}$
④ $3\sqrt{12}$

정답 3번

출제 포인트

이차방정식의 근이 만족하는 식과 근과 계수의 관계를 이용하여 근호식의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

두 근은 $\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 1$을 만족한다. 두 근은 모두 양수이므로 $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$를 실수 범위에서 다룰 수 있다.
구해야 할 값은 $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$이다.

사용할 공식

근과 계수의 관계는 $\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 1$이다. 또한 각 근 t는 $t^2 - 9t + 1 = 0$을 만족하므로 $t^2 + 1 = 9t$이다.
이 식을 사용하면 근호 안의 이차식을 각 근의 일차식으로 바꿀 수 있다.

계산 과정

각 근에 대하여 $\alpha^2 + 1 = 9\alpha, \beta^2 + 1 = 9\beta$이므로
$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1} = 3\sqrt{\alpha} + 3\sqrt{\beta} = 3(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})$
이다. 그리고
$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 9 + 2 = 11$
이며 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0$이므로 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{11}$이다. 따라서 구하는 값은 $3\sqrt{11}$이다.

선지 판단

① X — $2\sqrt{11}$은 바깥 계수를 2로 잘못 계산한 값이다. $\sqrt{9\alpha} = 3\sqrt{\alpha}$이므로 올바른 값은 $3\sqrt{11}$이다.
② X — $2\sqrt{12}$는 바깥 계수와 근호 안의 값을 모두 잘못 계산한 값이다. 바깥 계수는 3이고,
$\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 9 + 2 = 11$이므로 올바른 값은 $3\sqrt{11}$이다.
③ O — 계산 결과가 $3\sqrt{11}$이므로 일치한다.
④ X — 바깥 계수 3은 맞지만 근호 안을 12로 계산한 부분이 틀리다. $\alpha\beta = 1$이므로 $2\sqrt{\alpha\beta} = 2$이고, 근호 안은
$9 + 2 = 11$이 되어 올바른 값은 $3\sqrt{11}$이다.

NoteBase

오답 포인트

핵심 함정은 $\sqrt{9\alpha}=3\sqrt{\alpha}$에서 계수 3을 놓치거나, $2\sqrt{\alpha\beta}=2$를 잘못 처리하여 근호 안을 12로 만드는 것이다.

다시 나오면 이렇게 판단

근이 들어간 고차식은 먼저 원래 방정식으로 차수를 낮추고, 근과 계수의 관계로 합과 곱을 치환한 뒤 근호의 부호 조건을 확인한다.

암기 포인트

근 t에는 원래 방정식 $t^2-9t+1=0$을 다시 대입하여 $t^2+1=9t$로 바꾼다.

NoteBase

문 5. 두 직선 $5x+y-5=0$과 $mx-y-2m+1=0$이 제1사분면에서 만날 때, 상수 m의 값의 범위는?

① $-2<m<1$

② $-1<m<2$

③ $0<m<2$

④ $1<m<2$

정답 1번

출제 포인트

두 직선의 교점 좌표를 m으로 나타낸 뒤, 제1사분면의 조건인 $x>0, y>0$을 동시에 만족하는 범위를 구하는 문제이다.

조건 정리

첫째 직선은 $y=5-5x$, 둘째 직선은 $y=mx-2m+1$이다. 두 직선의 교점이 제1사분면에 있으려면 교점의 두 좌표가 모두 양수여야 하므로 $x>0, y>0$이어야 한다. 좌표축 위의 점은 제1사분면에 포함되지 않으므로 등호는 붙지 않는다.

사용할 공식

교점에서는 두 직선의 y값이 같으므로

$5-5x=mx-2m+1$

을 푼다. 그 결과 교점의 좌표는

$x=\frac{2(m+2)}{m+5}, \qquad y=\frac{5(1-m)}{m+5}$

이다. 이 좌표에 제1사분면 조건을 적용하면 된다.

계산 과정

교점의 x좌표가 양수일 조건은

$\frac{m+2}{m+5}>0$

이므로 $m<-5$ 또는 $m>-2$이다.

교점의 y좌표가 양수일 조건은

$\frac{1-m}{m+5}>0$

이므로 $-5<m<1$이다.

두 조건의 공통 범위는

$(-\infty,\ -5)\cup(-2,\infty)\cap(-5,1)=(-2,1)$

이므로 $-2<m<1$이다. $m=-2$이면 교점의 x좌표가 0이고, $m=1$이면 y좌표가 0이므로 두 끝값은 제외된다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산한 범위 $-2 < m < 1$과 정확히 일치한다.
② X — '$-1 < m < 2$'는 아래끝값과 위끝값이 모두 잘못되었다. 올바르게는 $-2 < m < 1$이다. 특히 $1 \le m < 2$에서는 교점의 y좌표가 0 이하이다.
③ X — '$0 < m < 2$'는 가능한 음수 구간 $-2 < m \le 0$을 빠뜨리고, 불가능한 구간 $1 \le m < 2$를 포함한다. 올바르게는 $-2 < m < 1$이다.
④ X — '$1 < m < 2$'에서는 교점의 y좌표가 음수이므로 제1사분면에서 만나지 않는다. 올바르게는 $-2 < m < 1$이다.

오답 포인트

두 직선이 만난다는 조건만 확인하고 교점의 두 좌표가 모두 양수여야 한다는 조건을 빠뜨리기 쉽다. 또한 $m = -2$와 $m = 1$에서는 교점이 좌표축 위에 놓이므로 제1사분면에 포함되지 않는다는 점이 핵심 함정이다.

다시 나오면 이렇게 판단

직선의 위치 조건 문제는 교점 좌표를 매개변수로 나타낸 뒤, 사분면에 맞는 좌표의 부호 조건을 각각 세우고 그 공통 범위를 구한다. 분수부등식에서는 분자와 분모가 0이 되는 경계값을 먼저 표시하면 부호를 정확히 판단할 수 있다.

암기 포인트

제1사분면의 점은 $x > 0, y > 0$이며, 좌표축은 포함하지 않는다.

NoteBase

문 6. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 $\sqrt{(a-4)^2 + (b-3)^2}$의 최솟값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

정답 3번

출제 포인트

원 위의 점과 원 밖의 한 점 사이의 최단거리를 원의 중심에서 그 점까지의 거리와 반지름의 차로 구하는 문제이다.

조건 정리

원 $x^2 + y^2 = 1$의 중심은 $O(0, 0)$, 반지름은 1이다. 식 $\sqrt{(a-4)^2 + (b-3)^2}$는 원 위의 점 $P(a, b)$와 점 $Q(4, 3)$ 사이의 거리 PQ이다. 구해야 할 값은 P가 원 위를 움직일 때의 PQ의 최솟값이다.

사용할 공식

점 Q가 중심 O, 반지름 r인 원의 밖에 있을 때 원 위의 점 P와 Q 사이의 최단거리는 $OQ - r$이다. 중심, P, Q가 같은 직선 위에 있고 P가 Q 쪽에 있을 때 최단거리가 되기 때문이다.

계산 과정

먼저 중심에서 점 $Q(4, 3)$까지의 거리를 구한다.

$OQ = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

점 Q는 원 밖에 있으므로 최단거리는

$PQ_{\min} = OQ - r = 5 - 1 = 4$

이다. 실제로 P=(45,35)일 때 이 값이 얻어진다.

선지 판단

① X — 2는 최솟값이 아니다. 중심과 Q 사이의 거리 5에서 반지름 1을 빼야 하므로, 올바른 값은 4이다.

② X — 3은 최솟값이 아니다. $OQ = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$이고 원의 반지름이 1이므로, 올바른 값은 $5 - 1 = 4$이다.

③ O — 원 밖의 점과 원 사이의 최단거리 $OQ - r$를 적용하면 $5 - 1 = 4$이므로 맞다.

④ X — 5는 중심 O에서 점 Q까지의 거리일 뿐, 원 위의 점 P에서 Q까지의 최단거리가 아니다. 올바르게는 반지름 1을 뺀 4이다.

NoteBase

오답 포인트

④의 5는 $\sqrt{4^2+3^2}$까지만 계산하고 반지름을 빼지 않았을 때 나오는 값이다. 구하는 거리는 원의 중심과 Q 사이의 거리가 아니라 원 위의 점과 Q 사이의 거리이므로 반지름 1을 반드시 뺀다.

다시 나오면 이렇게 판단

거리식에서 고정된 점의 좌표를 찾고, 원의 중심에서 그 점까지의 거리 d와 반지름 r을 비교한다. 점이 원 밖에 있으면 최단거리는 $d-r$, 원 안에 있으면 $r-d$이므로 일반적으로 $|d-r|$로 판단한다.

암기 포인트

점과 원 사이의 최단거리 = 중심까지의 거리와 반지름의 차의 절댓값, 즉 $|d-r|$이다.

NoteBase

문 7. 함수 $f(x)=|x-2|$에 대하여 $(f\circ f)(x)=1$을 만족하는 모든 x의 값의 합은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 합성함수의 정의에 따라 $f(f(x))$를 절댓값 식으로 바꾸고, 절댓값 방정식의 모든 해를 구해 합하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 $f(x)=|x-2|$이다. 구해야 할 것은 $(f\circ f)(x)=1$을 만족하는 모든 x의 합이다. 절댓값 방정식을 풀 때 각 단계에서 가능한 두 경우를 모두 확인해야 한다.

사용할 공식

$(f\circ f)(x)=f(f(x))$이므로
$f(f(x))=||x-2|-2|$.
또한 $|A|=1$이면 $A=1$ 또는 $A=-1$이다. 합성함수에 같은 함수가 두 번 적용되고 결과가 절댓값 방정식이므로 이 관계를 사용한다.

계산 과정

먼저
$||x-2|-2|=1$
에서 $|x-2|-2=1$ 또는 $|x-2|-2=-1$이다. 따라서 $|x-2|=3$ 또는 $|x-2|=1$이다.
$|x-2|=3$에서 $x=5,\ -1$이고, $|x-2|=1$에서 $x=3,1$이다. 그러므로 모든 해의 합은
$-1+1+3+5=8$
이다.

선지 판단

① O — 모든 해 $-1, 1, 3, 5$의 합이 8이므로 계산 결과와 일치한다.
② X — 9는 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 9는 올바르게는 8이다.
③ X — 10은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 10은 올바르게는 8이다.
④ X — 11은 계산 결과와 일치하지 않는다. 틀린 값 11은 올바르게는 8이다.

NoteBase

오답 포인트

바깥 절댓값만 풀거나 $|x-2|=3$과 $|x-2|=1$ 중 한 경우를 빠뜨리면 모든 해를 구할 수 없다. 또한 각 절댓값 방정식에서 나오는 두 해를 모두 포함해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

합성함수를 먼저 실제 식으로 전개한 뒤, 바깥 절댓값부터 두 경우로 나누고 안쪽 절댓값에서도 다시 두 경우를 확인한다. 마지막에는 구한 해를 원래 식에 대입해 빠진 해가 없는지 검산한다.

암기 포인트

$|A|=k$에서 $k>0$이면 $A=k$와 $A=-k$의 두 경우를 모두 확인한다.

NoteBase

문 8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^3 - n + 2$일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$

정답 4번

출제 포인트

부분합 S_n에서 일반항 a_n을 구한 뒤, 부분분수로 바꾸어 망원급수를 계산하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $S_n = n^3 - n + 2$
구해야 할 값: $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k}$
주의할 조건: 첫째항은 $a_1 = S_1$로 구하고, $n \geq 2$에서는 $a_n = S_n - S_{n-1}$을 사용한다.

사용할 공식

$a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$
$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
부분합은 연속된 항의 누적합이므로 이웃한 두 부분합의 차가 해당 일반항이 된다. 또한 두 번째 식으로 분해하면 중간항이 서로 소거된다.

계산 과정

첫째항은
$a_1 = S_1 = 1^3 - 1 + 2 = 2$
이다. $k \geq 2$일 때는
$a_k = S_k - S_{k-1} = 3k(k-1)$
이므로
aligned Σ _k=1^10(1)/(a_k)&=12+13 Σ _k=2^10(1)/(k(k-1))\\&=12+13 Σ _k=2^10≤ft((1)/(k-1)-(1)/(k))\\&=12+13≤ft(1-(1)/(10))\\&=12+(3)/(10)=45.aligned

NoteBase

선지 판단

① X — 계산값은 45이므로 15는 틀린 값이다. 올바르게는 45이다.
② X — 계산값은 45이므로 25는 틀린 값이다. 올바르게는 45이다.
③ X — 계산값은 45이므로 35는 틀린 값이다. 올바르게는 45이다.
④ O — 첫째항의 역수 12와 $k=2$부터 10까지의 합 $\frac{3}{10}$을 더하면 45가 된다.

오답 포인트

$a_k = S_k - S_{k-1}$을 $k=1$에도 그대로 적용해 주어진 식에 없는 S_0을 임의로 사용하면 첫째항을 잘못 처리하게 된다. 이 문제에서는 $a_1 = S_1 = 2$를 따로 구한 뒤 나머지 항에 차분 공식을 적용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

부분합이 주어지면 첫째항을 따로 계산하고, 둘째항부터는 $a_n = S_n - S_{n-1}$로 구한다. 역수의 합은 인수분해와 부분분수 분해를 거쳐 중간항의 소거 여부를 확인한다.

암기 포인트

부분합에서 일반항을 구할 때는 $a_1 = S_1$, $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$이다.

NoteBase

문 9. 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^6 = 3, b^5 = 7, c^4 = 11$일 때, $(abc)^n$이 자연수가 되는 n의 최솟값은? (단, n은 자연수이다.)

① 20

② 40

③ 60

④ 80

정답 3번

출제 포인트

서로 다른 소수를 밑으로 하는 거듭제곱의 지수가 모두 정수가 되도록 하는 최소의 자연수 n을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건에서 $a = 3^{1/6}$, $b = 7^{1/5}$, $c = 11^{1/4}$이다. 따라서 $(abc)^n = 3^{n/6}7^{n/5}11^{n/4}$이다. 이 값이 자연수가 되려면 세 소수 3, 7, 11의 지수 $n/6$, $n/5$, $n/4$가 모두 정수여야 한다.

사용할 공식

$n = \mathrm{lcm}(6, 5, 4)$
각 소수의 지수를 정수로 만들려면 n이 6, 5, 4의 공배수여야 하며, 최솟값을 묻고 있으므로 최소공배수를 사용한다.

계산 과정

$6 = 2 \times 3, \quad 5 = 5, \quad 4 = 2^2$
$\mathrm{lcm}(6, 5, 4) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$
실제로 $n = 60$이면 $(abc)^{60} = 3^{10}7^{12}11^{15}$가 되어 자연수이다.

선지 판단

① X — 20이면 $20/6 = 10/3$이 정수가 아니므로 $3^{20/6}$이 정수의 거듭제곱이 되지 않는다. 틀린 값 20을 고친 최솟값은 60이다.
② X — 40이면 $40/6 = 20/3$이 정수가 아니므로 조건을 충족하지 않는다. 틀린 값 40을 고친 최솟값은 60이다.
③ O — 60은 6, 5, 4로 모두 나누어지며 각 지수가 10, 12, 15가 되므로 $(abc)^{60}$은 자연수이다.
④ X — 80은 5와 4의 배수이지만 6의 배수가 아니며 $80/6 = 40/3$이다. 틀린 값 80을 고친 최솟값은 60이다.

NoteBase

오답 포인트

20, 40, 80은 5와 4의 공배수이지만 6의 배수는 아니다. b와 c의 조건만 확인하고 $a^6 = 3$의 분모 6을 빠뜨리면 오답을 고르게 된다.

다시 나오면 이렇게 판단

각 수를 소수의 분수 지수 꼴로 바꾼 뒤, 모든 지수의 분모를 적고 그 분모들의 최소공배수를 구한다. 마지막으로 구한 n을 각 분모로 나누어 모두 정수가 되는지 확인한다.

암기 포인트

분수 지수를 모두 정수로 만드는 최소 지수는 분모들의 최소공배수이다.

NoteBase

문 10. 세 수 $A=\frac{1}{2}\log_3 2-\log_2\frac{1}{8}$, $B=\log_2 6+\log_3 6$, $C=\log_2 8+\log_9 3$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B<C$

② $A<C<B$

③ $B<A<C$

④ $C<A<B$

정답 2번

출제 포인트

로그의 기본 성질과 밑 변환 관계를 이용하여 세 수의 범위를 비교하는 문제이다.

조건 정리

$-\log_2\frac{1}{8}=3$이고 $\log_9 3=\frac{1}{2}$이다. 또한 $0<\log_3 2<1$이며, $x=\log_2 3>0$로 놓으면 $\log_3 2=\frac{1}{x}$이다.

사용할 공식

$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c,\qquad \log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

$x+\frac{1}{x}\geq 2\quad (x>0)$

로그의 곱셈 법칙과 밑 변환 관계로 각 수를 비교하기 쉬운 형태로 바꾸고, 양수 x에 대한 산술평균·기하평균 관계로 B의 하한을 구한다.

계산 과정

1. $A=\frac{1}{2}\log_3 2+3$이다. $0<\log_3 2<1$이므로 $3<A<\frac{7}{2}$이다.
2. $C=\log_2 8+\log_9 3=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$이다. 따라서 $A<C$이다.
3. $x=\log_2 3>0$로 놓으면 $B=(1+x)+(1+\frac{1}{x})=2+x+\frac{1}{x}\geq 4$이다. $C=\frac{7}{2}<4$이므로 $C<B$이다.
4. 따라서 세 수의 대소 관계는 $A<C<B$이다.

선지 판단

① X — $A<B<C$는 $B<C$라고 한 부분이 틀렸다. 실제로 B≥4>(7)/(2)=C이므로 올바른 관계는 $A<C<B$이다.

② O — 계산 결과 $A<C<B$이므로 옳다.

③ X — $B<A<C$는 $B<A$라고 한 부분이 틀렸다. 실제로 $A<\frac{7}{2}<4\leq B$이므로 올바른 관계는 $A<C<B$이다.

④ X — $C<A<B$는 $C<A$라고 한 부분이 틀렸다. 실제로 $A<\frac{7}{2}=C$이므로 올바른 관계는 $A<C<B$이다.

NoteBase

오답 포인트

A와 C를 소수로 근사하지 않고도 $0 < \log_3 2 < 1$에서 곧바로 $A < C$를 판단할 수 있다. 또한 B의 두 로그를 따로 어림하면 순서를 잘못 잡기 쉬우므로, $\log_2 3$과 $\log_3 2$가 서로 역수라는 점을 이용하는 것이 핵심이다.

다시 나오면 이렇게 판단

로그의 대소 비교에서는 먼저 정수로 계산되는 항을 정리하고, 남은 로그는 밑 변환으로 같은 변수와 그 역수 형태로 만든다. 정확한 값이 필요하지 않으면 로그의 범위와 x+(1)/(x)≥2 같은 부등식으로 순서를 결정한다.

암기 포인트

서로 뒤집힌 로그는 역수 관계이다: $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

NoteBase

문 11. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 모든 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여
$a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 3}, \quad a_n \neq 0$
을 만족할 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

정답 3번

출제 포인트

분수꼴 점화식에서 역수를 취해 등차수열로 바꾼 뒤 수열의 일반항과 극한을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 조건은 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 3}, a_n \neq 0$이다. 구해야 할 값은 $\lim_{n\to\infty} na_n$이다. $a_n \neq 0$이므로 점화식의 양변에 역수를 취할 수 있다.

사용할 공식

$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 3}{3a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}$ 따라서 $b_n = \frac{1}{a_n}$으로 놓으면 b_n+1=b_n+13인 등차수열이 된다. 분수꼴 점화식의 역수가 이전 항의 역수에 일정한 값을 더하는 꼴이므로 이 치환을 사용한다.

계산 과정

$b_n = \frac{1}{a_n}$으로 놓으면 b_1=12, 공차는 13이다. 따라서
b_n=12+(n-1)/(3)=(2n+1)/(6)
이므로
$a_n = \frac{6}{2n+1}$
이다. 이에 따라
$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n}{2n+1}$=3
이다.

선지 판단

① X — 1은 계산 결과 3과 다르다. 올바른 값은 3이다.

② X — 2는 계산 결과 3과 다르다. 올바른 값은 3이다.

③ O — $a_n = \frac{6}{2n+1}$이므로 na_n의 극한은 3이다.

④ X — 4는 계산 결과 3과 다르다. 올바른 값은 3이다.

NoteBase

오답 포인트

점화식 자체를 직접 반복하기보다 역수를 취해야 구조가 단순해진다. 또한 $a_n \to 0$이라는 사실만 보고 $na_n \to 0$으로 판단하면 안 된다. 실제로 $a_n = \frac{6}{2n+1}$은 3n과 같은 속도로 감소하므로 $na_n \to 3$이다.

다시 나오면 이렇게 판단

분수꼴 점화식에 현재 항이 분모와 분자에 함께 나타나면 먼저 역수를 취한다. 역수가 등차수열이 되는지 확인한 뒤 일반항을 구하고, 마지막에 요구된 극한식을 계산한다.

암기 포인트

$a_{n+1} = \frac{ca_n}{a_n + c}$이면 1a_n+1=1a_n+1c이다.

NoteBase

문 12. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $l_1, l_2, \cdots, l_6$는 상수이다.)

<보기>

㉠ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = l_2$이면, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$이다.

㉡ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l_3$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = l_4$이면, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = l_4 - l_3$이다.

㉢ $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) \neq 0$이면, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l_5$ 또는 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = l_6$이다.

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

정답 2번

출제 포인트

수렴하는 급수의 일반항은 0으로 수렴한다는 필요조건과 수렴급수의 선형성을 이용하여 각 명제의 참·거짓을 판단하는 문제이다.

조건 정리

급수 $\sum a_n$이 수렴하면 $a_n \to 0$이어야 한다. 두 급수가 수렴하면 그 합과 차의 급수도 수렴하며, 합은 각 급수의 합에 같은 연산을 한 값이다. 다만 일반항이 0으로 수렴하는 것은 급수 수렴의 필요조건일 뿐 충분조건은 아니다.

사용할 원리

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

따라서 두 급수의 합이 주어지면 식을 이항하여 나머지 급수의 합을 구할 수 있다. 또한 두 급수가 모두 수렴한다고 가정하면 $a_n \to 0$, $b_n \to 0$이므로 $a_n + b_n \to 0$이다.

판단 과정

㉠ O: 두 급수가 수렴하므로 $a_n \to 0$, $b_n \to 0$이고, 따라서 $a_n b_n \to 0$이다.

㉡ X: $l_4 = l_3 - \sum b_n$이므로 $\sum b_n = l_3 - l_4$이다. 틀린 표현 $l_4 - l_3$은 $l_3 - l_4$로 고쳐야 한다.

㉢ X: $a_n + b_n$의 극한이 0이 아니면 두 급수가 동시에 수렴할 수 없으므로 적어도 하나는 발산한다. 틀린 결론 '적어도 하나의 급수가 수렴한다'는 '적어도 하나의 급수가 발산한다'로 고쳐야 한다. 예를 들어 $a_n = b_n = 1$이면 $a_n + b_n \to 2$이지만 두 급수는 모두 발산한다.

따라서 옳은 것은 ㉠ 하나뿐이다.

NoteBase

선지별 해설

① X: 옳은 명제는 0개가 아니라 ㉠의 1개이다. ‘0개’는 ‘1개’로 고쳐야 한다.
② O: ㉠만 옳으므로 옳은 명제의 개수는 1개이다.
③ X: ㉡과 ㉢이 모두 틀리므로 2개가 아니라 1개이다. ‘2개’는 ‘1개’로 고쳐야 한다.
④ X: 세 명제가 모두 옳은 것이 아니므로 3개가 아니라 1개이다. ‘3개’는 ‘1개’로 고쳐야 한다.

오답 포인트

㉡에서는 차의 급수 식을 이항할 때 부호를 뒤집기 쉽다. ㉢에서는 ‘두 급수가 모두 수렴하면 합의 일반항이 0으로 간다’의 대우가 ‘합의 일반항이 0으로 가지 않으면 적어도 하나의 급수가 발산한다’라는 점을 놓치기 쉽다.

다시 나오면 이렇게 판단

급수의 수렴이 주어지면 먼저 일반항이 0으로 수렴하는지 확인하고, 급수의 합과 차는 선형성으로 정리한다.
‘모두 수렴’의 부정은 ‘적어도 하나가 발산’임을 이용해 명제의 대우를 판단한다.

암기 포인트

급수 수렴이면 일반항은 0, 차의 급수는 합도 차, ‘둘 다 수렴’의 부정은 ‘하나 이상 발산’이다.

NoteBase

문 13. 주어진 함수
f(x)=casesa & (x=-2)\\(x^2-bx-2)/(x+2) & (x≠-2)cases
가 모든 실수 x에 대하여 연속일 때, ab^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① -9

② -3

③ 3

④ 9

정답 2번

출제 포인트

이 문제는 조각함수가 경계점에서 연속이 되기 위한 조건을 이용하여 상수 a, b와 ab^2의 값을 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 값: $f(-2)=a$, $x\neq -2$에서 $f(x)=\frac{x^2-bx-2}{x+2}$이다.
구해야 할 값: ab^2이다.
주의할 조건: 모든 실수에서 연속이므로 특히 $x=-2$에서 극한값이 존재하고 그 값이 a와 같아야 한다.

사용할 공식

연속 조건은
$\lim_{x\to -2} f(x)=f(-2)=a$
이다. 분모 $x+2$가 $x=-2$에서 0이 되므로 유한한 극한이 존재하려면 분자도 0이 되어야 한다.

계산 과정

1. 분자에 $x=-2$를 대입하여 0으로 놓는다.
$(-2)^2-b(-2)-2=2+2b=0$
따라서 $b=-1$이다.
2. $b=-1$을 대입하면 분자는 인수분해된다.
$x^2+x-2=(x+2)(x-1)$
따라서 $x\neq -2$에서 $f(x)=x-1$이다.
3. 연속 조건으로 a를 구한다.
$a=\lim_{x\to -2}(x-1)=-3$
4. 구하는 값을 계산한다.
$ab^2=(-3)(-1)^2=-3$

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 -3이므로 -9는 틀린 값이다. 올바르게는 $ab^2 = -3$이다.
② O — $a = -3$, $b = -1$이므로 $ab^2 = (-3)(-1)^2 = -3$이다.
③ X — $b^2 = 1$이어서 a의 음의 부호가 사라지지 않으므로 3은 틀린 값이다. 올바르게는 $ab^2 = -3$이다.
④ X — 연속 조건에서 구한 $a = -3$과 $b = -1$을 대입하면 9가 아니라 -3이다. 올바르게는 $ab^2 = -3$이다.

오답 포인트

분모만 0이 된다는 이유로 극한이 없다고 판단하면 안 된다. 분자도 0이 되도록 b를 정한 뒤 공통인수 $x + 2$를 약분해야 한다. 또한 b^2은 양수이지만 $a = -3$의 부호까지 바뀌는 것은 아니다.

다시 나오면 이렇게 판단

조각함수의 경계점에서 분모가 0이면 먼저 분자도 0이 되는 조건을 구하고, 인수분해와 약분으로 극한을 계산한 뒤 그 극한값을 함수값과 같게 둔다.

암기 포인트

연속은 '좌우 극한값 = 함수값'이며, 0/0 꼴은 인수분해하여 약분한 뒤 극한을 구한다.

NoteBase

문 14. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치가 각각
$f(t) = t^2 + 3t, \quad g(t) = 2t^2 - 7t$
이다. 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간에 두 점 사이의 거리는?

① 19

② 21

③ 23

④ 25

정답 4번

출제 포인트

위치함수를 미분해 속도함수를 구하고, 두 속도가 같아지는 시각에서 두 점의 위치 차의 절댓값을 계산하는 문제이다.

조건 정리

점 P의 위치는 $f(t) = t^2 + 3t$, 점 Q의 위치는 $g(t) = 2t^2 - 7t$이다. 두 점의 속도가 같아지는 시각 t를 먼저 구한 뒤, 그 시각의 거리 $|f(t) - g(t)|$를 구한다.

사용할 공식

위치함수의 도함수가 속도함수이므로 $v_P(t) = f'(t)$, $v_Q(t) = g'(t)$이다. 두 점의 속도가 같은 조건은 $f'(t) = g'(t)$이고, 수직선 위 두 점 사이의 거리는 두 위치의 차의 절댓값 $|f(t) - g(t)|$이다.

계산 과정

$f'(t) = 2t + 3$, $g'(t) = 4t - 7$이다.
$2t + 3 = 4t - 7$에서 $2t = 10$이므로 $t = 5$이다.
이때 $f(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$, $g(5) = 2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5 = 15$이다. 따라서 두 점 사이의 거리는 40-15=25이다.

선지 판단

① X — 19는 $t = 5$일 때의 위치 차가 아니다. 올바르게 계산한 거리는 40-15=25이다.
② X — 21은 두 속도를 같게 놓아 구한 시각에서의 위치 차와 일치하지 않는다. 올바른 거리는 25이다.
③ X — 23은 $f(5)$와 $g(5)$의 차가 아니다. 올바른 위치 차의 절댓값은 25이다.
④ O — 속도가 같아지는 시각은 $t = 5$이고, 이때 두 점 사이의 거리는 $|f(5) - g(5)| = 25$이다.

NoteBase

오답 포인트

속도가 같다는 조건을 위치가 같다는 조건으로 바꾸어 풀면 안 된다. 먼저 도함수끼리 같게 놓아 시각을 구하고, 그 시각을 원래 위치함수에 대입해야 한다. 또한 위치의 차에는 절댓값을 취해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

위치함수 미분 → 속도 조건으로 시각 결정 → 원래 위치함수에 시각 대입 → 위치 차의 절댓값 계산의 순서로 판단한다.

암기 포인트

속도는 위치의 미분이고, 수직선 위 두 점 사이의 거리는 위치 차의 절댓값이다.

NoteBase

문 15. 일차함수 $f(x)$에 대하여,
$2\int f(x)dx = f(x) + xf(x) - x + 1$
을 만족한다. $f(1) = 3$일 때, $f(2)$의 값은?

① 5

② 7

③ 9

④ 11

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 적분이 포함된 함수의 등식을 미분하여 일차함수의 계수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 함수는 일차함수이므로 $f(x) = ax + b$로 놓을 수 있다. 또한 $f(1) = 3$이므로 $a + b = 3$이다. 구해야 할 값은 $f(2)$이다.

사용할 공식

등식의 양변을 x에 대하여 미분할 때 미적분학의 기본정리와 곱의 미분법을 사용한다.
$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x), \qquad \frac{d}{dx}\{xf(x)\} = f(x) + xf'(x)$
주어진 식이 모든 x에 대한 함수의 등식이므로 양변을 미분하면 적분을 없애고 f와 f'의 관계를 얻을 수 있다.

계산 과정

주어진 식의 양변을 미분하면
$2f(x) = f'(x) + f(x) + xf'(x) - 1$
이므로
$(1 + x)f'(x) - f(x) = 1$
이다. $f(x) = ax + b$, $f'(x) = a$를 대입하면
$(1 + x)a - (ax + b) = a - b = 1$
을 얻는다. 여기에 $f(1) = a + b = 3$을 함께 풀면 $a = 2, b = 1$이다. 따라서
$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
이다.

NoteBase

선지 판단

① O — 계산 결과 $f(2) = 5$이므로 옳다.
② X — ②의 '7'은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 5이다.
③ X — ③의 '9'는 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 5이다.
④ X — ④의 '11'은 계산 결과와 다르다. 올바른 값은 5이다.

오답 포인트

적분상수를 따로 정하려고 식을 복잡하게 만들기보다 먼저 양변을 미분하는 것이 핵심이다. 또한 미분한 뒤 얻은 $a - b = 1$만 사용해서는 계수가 정해지지 않으므로, 초기조건 $a + b = 3$을 반드시 함께 사용해야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

적분이 포함된 함수 등식에서는 먼저 양변을 미분해 적분을 제거하고, 함수의 형태를 대입한 뒤 주어진 함숫값 조건과 연립하여 계수를 결정한다.

암기 포인트

적분 등식은 미분으로 단순화하고, 일차함수는 $f(x) = ax + b$와 $f'(x) = a$를 함께 사용한다.

NoteBase

문 16. 사차함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$, $f'(1)=0$, $f(0)=-3$이고
$\int_0^1 f(x)dx=4$
일 때, $f(1)$의 값은?

① 8

② 10

③ 12

④ 14

정답 3번

출제 포인트

우함수인 사차함수의 일반형을 세우고, 도함수 조건과 정적분 조건을 연립하여 함수값을 구하는 문제이다.

조건 정리

$f(-x)=f(x)$이므로 $f(x)$에는 홀수차항이 없다. 또한 $f(0)=-3$이므로 $f(x)=ax^4+bx^2-3$으로 놓는다.
구해야 할 값은 $f(1)$이다.

사용할 공식

$f'(x)=4ax^3+2bx$
$\int_0^1 f(x)dx=\frac{a}{5}+\frac{b}{3}-3$
도함수 조건은 a, b의 첫 번째 관계식을 주고, 정적분 조건은 두 번째 관계식을 주므로 두 식을 연립한다.

계산 과정

$f'(1)=0$에서
$4a+2b=0, \quad b=-2a$
이다. 이를 정적분 조건에 대입하면
$\frac{a}{5}+\frac{b}{3}-3=4$
$\frac{a}{5}-\frac{2a}{3}=7$
$-\frac{7a}{15}=7, \quad a=-15$
이므로 $b=30$이다. 따라서
$f(1)=-15+30-3=12$
이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 계산 결과는 8이 아니라 12이다. ‘8’은 ‘12’로 고쳐야 한다.
② X — 계산 결과는 10이 아니라 12이다. ‘10’은 ‘12’로 고쳐야 한다.
③ O — $f(1) = -15 + 30 - 3 = 12$이므로 계산 결과와 일치한다.
④ X — 계산 결과는 14가 아니라 12이다. ‘14’는 ‘12’로 고쳐야 한다.

오답 포인트

우함수 조건에서 홀수차항만 제거할 뿐 상수항은 남는다는 점이 핵심이다. 정적분할 때 상수항 -3의 적분값도 -3이므로 이를 빠뜨리면 계수가 달라진다.

다시 나오면 이렇게 판단

다항함수의 대칭 조건으로 일반형을 먼저 줄이고, 함수값 조건으로 상수항을 정한 뒤, 도함수 조건과 정적분 조건을 연립하여 계수를 구한다.

암기 포인트

우함수인 다항함수에는 짝수차항과 상수항만 남는다.

NoteBase

문 17. 방정식 $x + y + z = 9$의 음이 아닌 정수해의 개수는?

① 55

② 57

③ 59

④ 61

정답 1번

출제 포인트

이 문제는 중복조합, 즉 별과 막대 원리를 이용해 세 변수의 음이 아닌 정수해의 개수를 구하는 문제이다.

조건 정리

주어진 식: $x + y + z = 9$
구해야 할 값: x, y, z가 모두 음이 아닌 정수일 때의 순서 있는 해 (x, y, z)의 개수
주의할 조건: 0도 허용되므로 양의 정수해가 아니라 음이 아닌 정수해를 센다.

사용할 공식

음이 아닌 정수해의 개수는 별과 막대 원리에 따라
x_1+x_2+·s+x_r=n n+r-1 r-1
이다. 합 9를 나타내는 별 9개 사이와 양 끝의 10개 위치 중 변수 세 묶음을 나눌 막대 2개의 위치를 중복 허용하여 정하는 것과 같으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

변수는 3개이고 합은 9이므로
9+3-1 3-1=11 2=(11×10)/(2)=55
이다. 따라서 음이 아닌 정수해는 55개이다.

선지 판단

① O — 계산 결과가 55이므로 옳다.
② X — 57이 아니라 55이다. 11 2를 정확히 계산하면 55가 된다.
③ X — 59가 아니라 55이다. 변수 3개를 구분하는 데 필요한 막대는 3개가 아니라 2개이다.
④ X — 61이 아니라 55이다. 0을 허용하는 조건을 반영한 중복조합 11 2의 값은 55이다.

오답 포인트

‘음이 아닌 정수’에는 0이 포함된다. 또한 변수 3개를 나누는 막대는 2개이므로 9+3-1 3-1을 사용해야 한다.

NoteBase

다시 나오면 이렇게 판단

r개의 음이 아닌 정수 변수의 합이 n이면 n+r-1 r-1을 적용한다. 양의 정수 조건이면 각 변수에서 1씩 먼저 빼고 계산한다.

암기 포인트

음이 아닌 정수해는 별 n개와 막대 $r-1$개로 세며, 개수는 n+r-1 r-1이다.

NoteBase

문 18. 문자 P, O, L, I, C, E가 각각 하나씩 적힌 카드 6장 중에 2장을 임의로 뽑을 때, 뽑힌 카드에 적어도 한 개의 모음이 포함될 확률은?

① $\frac{1}{5}$
② $\frac{2}{5}$
③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$

정답 4번

출제 포인트

이 문제는 여사건을 이용하여 2장의 카드 중 적어도 한 장이 모음일 확률을 구하는 문제이다.

조건 정리

전체 카드는 P, O, L, I, C, E의 6장이다.
모음 카드는 O, I, E의 3장이고, 자음 카드는 P, L, C의 3장이다.
구해야 할 것은 2장을 뽑았을 때 적어도 한 장이 모음인 확률이다.

사용할 공식

적어도 한 장이 모음인 사건의 여사건은 두 장 모두 자음인 사건이다. 따라서
P(적어도 한 장이 모음)=1-P(두 장 모두 자음)
을 사용한다. '적어도 한 장'은 가능한 경우를 직접 나누어 세는 것보다 여사건을 이용하면 빠르고 정확하게 계산할 수 있다.

계산 과정

전체 6장 중 2장을 뽑는 경우의 수는 $\binom{6}{2} = 15$이다. 두 장 모두 자음인 경우의 수는 자음 3장 중 2장을 뽑는 $\binom{3}{2} = 3$이다. 따라서
P(적어도 한 장이 모음)=1-3262=1-(3)/(15)=(4)/(5)

선지 판단

① X — $\frac{1}{5}$은 두 장 모두 자음일 확률이다. '적어도 한 장이 모음'일 확률은 그 여사건의 확률인 $\frac{4}{5}$이다.
② X — $\frac{2}{5}$는 계산 결과와 일치하지 않는다. 올바른 값은 $1 - \frac{3}{15} = \frac{4}{5}$이다.
③ X — $\frac{3}{5}$는 계산 결과와 일치하지 않는다. 올바른 값은 $\frac{4}{5}$이다.
④ O — 여사건인 두 장 모두 자음일 확률 $\frac{1}{5}$을 1에서 빼면 $\frac{4}{5}$이므로 옳다.

NoteBase

오답 포인트

①의 $\frac{1}{5}$을 고르는 함정은 구하려는 사건이 아니라 여사건인 '두 장 모두 자음'의 확률에서 계산을 멈추는 것이다. 마지막에 반드시 1에서 여사건의 확률을 빼야 한다.

다시 나오면 이렇게 판단

'적어도 하나'의 확률은 전체에서 '하나도 없음'의 확률을 빼는 방식으로 판단한다. 중복 없이 여러 장을 뽑을 때는 전체 조합 수와 여사건의 조합 수를 각각 계산한다.

암기 포인트

적어도 하나 = 1 - 하나도 없음이다.

NoteBase

문 19. 세 확률변수 X, Y, W가 각각 이항분포
$B(100, \frac{1}{5}), B(225, \frac{1}{5}), B(400, \frac{1}{5})$
을 따른다고 하자. 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보기>
㉠ $P(\left|\frac{X}{100} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10}) < P(\left|\frac{W}{400} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10})$
㉡ $P(\left|\frac{Y}{225} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{25}) < P(\left|\frac{X}{100} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{10})$
㉢ $P(\left|\frac{Y}{225} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{25}) < P(\left|\frac{W}{400} - \frac{1}{5}\right| < \frac{1}{25})$

① ㉠
② ㉠, ㉢
③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉡, ㉢

정답 4번

출제 포인트

같은 성공확률을 갖는 이항분포에서 표본비율이 모비율 주위의 주어진 구간에 들어갈 확률을 비교하는 문제이다.

조건 정리

$S_n \sim B(n, 1/5)$이면 $E(S_n/n) = 1/5$이고, 표본비율의 표준편차는
((1/5)(4/5))/(n)=(2)/(5 n)
이다. 따라서 각 구간의 반폭을 표준편차로 나눈 값은 X의 1/10 구간에서 2.5, Y의 1/25 구간에서 1.5, W의 1/10 구간에서 5, W의 1/25 구간에서 2이다.

사용할 공식

n이 충분히 크면 중심극한정리에 의해 이항분포는 정규분포로 근사되고, 표본비율 $\hat{p} = S_n/n$은 근사적으로 $N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$을 따른다. 따라서 표준화하면
$P(|\hat{p} - p| < c) \approx P(|Z| < \frac{c}{\sigma}), \quad \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
이다. $P(|Z| < k)$는 k가 클수록 커지므로, 두 확률의 대소는 $k = c/\sigma$ 값의 대소만 비교하면 판정된다.

NoteBase

계산 과정

조건 정리에서 구한 배수를 표준화 식에 넣으면 각 확률은 다음과 같다.
X ($\sigma = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$): P≤ft(≤ft|(X)/(100)-15|<110)≈ P(|Z|<2.5)
Y ($\sigma = \frac{2}{75}$): P≤ft(≤ft|(Y)/(225)-15|<125)≈ P(|Z|<1.5)
W ($\sigma = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$): P≤ft(≤ft|(W)/(400)-15|<110)≈ P(|Z|<5), P≤ft(≤ft|(W)/(400)-15|<125)≈ P(|Z|<2)
㉠은 $P(|Z| < 2.5) < P(|Z| < 5)$인지 묻는 것이고 $2.5 < 5$이므로 참이다.
㉡은 $P(|Z| < 1.5) < P(|Z| < 2.5)$인지 묻는 것이고 $1.5 < 2.5$이므로 참이다.
㉢은 $P(|Z| < 1.5) < P(|Z| < 2)$인지 묻는 것이고 $1.5 < 2$이므로 참이다.
실제 이항확률을 직접 합산해도 0.983(㉠ 좌변), 0.844(㉡·㉢ 좌변), 0.99999(㉠ 우변), 0.948(㉢ 우변)으로 같은 대소 관계가 나오므로, ㉠, ㉡, ㉢이 모두 옳다.

선지 판단

① X — ㉠만 고른 것이 틀렸다. ㉡과 ㉢도 참이므로 올바르게는 '㉠, ㉡, ㉢'이다.
② X — ㉠과 ㉢만 고르고 참인 ㉡을 빠뜨렸다. 올바르게는 '㉠, ㉡, ㉢'이다.
③ X — ㉡과 ㉢만 고르고 참인 ㉠을 빠뜨렸다. 올바르게는 '㉠, ㉡, ㉢'이다.
④ O — ㉠, ㉡, ㉢의 세 부등식이 모두 성립한다.

오답 포인트

구간의 반폭만 비교하면 ㉡과 ㉢을 놓치기 쉽다. 같은 반폭이라도 표본크기가 커지면 표본비율의 표준편차가 작아져 중심구간에 들어갈 확률이 커진다. 또한 $|X/100 - 1/5| < 1/10$은 엄격한 부등식이므로 $X = 10, 30$을 포함하지 않고 11≤ X≤29로 바뀐다.

다시 나오면 이렇게 판단

이항분포의 표본비율 문제에서는 먼저 표준편차 $\sqrt{p(1-p)/n}$를 구하고, 구간의 반폭을 표준편차로 나누어 중심에서 몇 표준편차까지 포함하는지 비교한다. 경계가 엄격한 부등식이면 가능한 정수 범위도 함께 확인한다.

암기 포인트

같은 p에서는 표본비율의 표준편차가 1/ n에 비례한다. 표본크기가 클수록 표본비율은 p 주변에 더 모인다.

NoteBase

문 20. 서울에 근무하는 경찰의 몸무게는 표준 편차가 5kg인 정규분포를 따른다고 하자. 이 몸무게의 평균을 신뢰도 95%로 추정할 때, 신뢰구간의 길이가 0.7이하가 되게 하려면 표본으로 최소 몇 명의 몸무게를 측정해야 하는가? (단, Z는 표준정규분포이며, $P(|Z| \le 1.96) = 0.95$이다.)

① 764

② 784

③ 804

④ 824

정답 2번

출제 포인트

모표준편차를 아는 정규모집단에서 모평균의 95% 신뢰구간 길이 조건을 이용해 필요한 최소 표본 크기를 구하는 문제이다.

조건 정리

모표준편차는 $\sigma = 5kg$이고, 95% 신뢰수준의 임계값은 $z_{0.025} = 1.96$이다. 신뢰구간의 길이가 0.7 이하가 되도록 하는 최소 자연수 n을 구한다.

사용할 공식

모표준편차 σ를 알 때 모평균의 95% 신뢰구간은 $\bar{x} \pm 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로 그 길이는 $2 \times 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이다. 문제에서 모표준편차와 정규분포 조건을 주었으므로 이 공식을 사용한다.

계산 과정

신뢰구간 길이 조건을 세우면
2×1.96×(5)/(√(n))≤0.7
이다. 이를 정리하면
(19.6)/(√(n))≤0.7, √(n)≥(19.6)/(0.7)=28
이므로 n≥28^2=784이다. 따라서 필요한 최소 표본 크기는 784명이다.

NoteBase

선지 판단

① X — 764명은 784보다 작아 신뢰구간의 길이가 0.7보다 커진다. 틀린 값 764명은 조건을 만족하지 않으며, 올바른 최소 인원은 784명이다.
② O — $n = 784$이면 $\sqrt{n} = 28$이고 신뢰구간의 길이는 $19.6/28 = 0.7$이므로 조건을 만족하는 최소값이다.
③ X — 804명은 신뢰구간의 길이를 0.7 이하로 만들지만 최소 인원이 아니다. '최소 몇 명'에 대한 올바른 값은 784명이다.
④ X — 824명도 신뢰구간의 길이를 0.7 이하로 만들지만 최소 인원이 아니다. '최소 몇 명'에 대한 올바른 값은 784명이다.

오답 포인트

신뢰구간의 길이는 오차한계 $1.96\sigma/\sqrt{n}$의 두 배이다. 오차한계와 전체 길이를 혼동하거나, 조건을 만족하는 큰 표본 수를 최소값으로 고르면 틀린다.

다시 나오면 이렇게 판단

신뢰구간의 '길이'가 주어지면 먼저 $2z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \le L$을 세우고, 부등식을 풀어 얻은 경계값 이상의 최소 자연수를 선택한다.

암기 포인트

모평균 신뢰구간의 전체 길이는 '임계값 × 표준오차'의 두 배이며, 최소 표본 수는 $n \ge (2z_{\alpha/2}\sigma/L)^2$로 판단한다.

NoteBase